

Controle Extremal para uma Classe de Equações Diferenciais Parciais da Onda com Amortecimento Kelvin-Voigt

Paulo Cesar Souza da Silva* Paulo César Pellanda*
Tiago Roux Oliveira** Gustavo Artur de Andrade***

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa,
Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: cesar.paulo151@hotmail.com, pellanda@ime.eb.br).

** Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),
Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: tiagoroux@uerj.br).

*** Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e
Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC),
Florianópolis – SC, Brasil,
(e-mail: gustavo.artur@ufsc.br)

Abstract: This paper presents the design and analysis of gradient extremum seeking (ES) for scalar static maps, which are optimized in the presence of infinite-dimensional dynamics governed by Partial Differential Equations (PDEs) of wave type containing a small amount of Kelvin-Voigt damping. This class of PDEs for extremum seeking has not been studied yet in the literature. We compensate the average-based actuation dynamics through a boundary controller via backstepping transformation. The local exponential convergence to a small neighborhood of the unknown optimal point is proven by means of an Input-to-State Stability (ISS) analysis as well as employing the averaging theory in infinite dimensions.

Resumo: Este artigo apresenta o projeto e análise do controle por busca extremal (ES) do tipo Gradiente para um mapeamento estático escalar desconhecido, que é otimizado na presença de dinâmicas de dimensão infinita governadas por Equações Diferenciais Parciais (EDPs) da onda contendo um amortecimento do tipo Kelvin-Voigt. Essa classe de EDPs para busca extremal ainda não foi estudada na literatura. As dinâmicas de atuação são compensadas por meio de um controlador baseado em estimativas médias dos parâmetros desconhecidos e é calculado via transformação backstepping. A convergência exponencial local para uma pequena vizinhança do ponto ótimo desconhecido é obtida mediante uma análise de estabilidade entrada-estado, assim como empregando a teoria da média em dimensões infinitas.

Keywords: Adaptive Control; Extremum Seeking; Partial Differential Equation; Averaging Theory; Backstepping in Infinite Dimensions.

Palavras-chaves: Controle Adaptativo; Busca Extremal; Equações Diferenciais Parciais; Teoria da Média; Transformação Backstepping em Dimensão Infinita.

1. INTRODUÇÃO

A metodologia de controle extremal, que pertence à área de controladores adaptativos, busca pontos extremos (máximo ou mínimo) de uma dada função de desempenho de um sistema não linear sem se basear no seu modelo. Nos últimos anos, esse método tem recebido grande atenção da comunidade de controle por resolver problemas de controle na qual o modelo da planta apresenta imperfeições ou incertezas dinâmicas (Krstić and Wang, 2000).

O ES foi inicialmente introduzido em Leblanc (1922) para a máxima transferência de potência para um bonde elétrico a partir de uma linha de transmissão. Ao longo da história, o número de publicações explorando o ES permaneceu

muito baixo (Tan et al., 2010) até a sua primeira prova de estabilidade para sistemas dinâmicos estáveis com mapeamentos de saída desconhecidos dada em Krstić and Wang (2000). A partir de então, importantes estudos foram publicados contribuindo para avanços teóricos e aplicações (Ariyur and Krstić, 2003), (Ghaffari et al., 2011), (Manzie and Krstić, 2009).

O artigo de Oliveira et al. (2017b) foi o primeiro trabalho a lidar com equações diferenciais parciais (EDP) via esquema de ES, abordando o projeto e análise de controle extremal multivariável para mapeamentos estáticos sujeitos a atrasos arbitrariamente longos. Além disso, vale ressaltar que os atrasos apontados pelos autores podem ser modelados como uma EDP de transporte hiperbólica de

primeira ordem. Esta ideia possibilitou o desenvolvimento de extensão para outras classes de EDPs (Oliveira and Krstic, 2022).

Neste artigo, considera-se uma EDP de onda contendo uma pequena quantidade de amortecimento Kelvin-Voigt, expandindo a classe de EDPs que podem ser controladas pela abordagem de ES. Embora alguns trabalhos abordem o controle de contorno considerando EDPs com amortecimento Kelvin-Voigt, eles focam principalmente em feixes, especificamente feixes Timoshenko delgados e feixes de cisalhamento (Krstić et al., 2007). Também é importante mencionar que a equação de onda com amortecimento Kelvin-Voigt não pode ser categorizada como uma EDP hiperbólica. Com no máximo um número finito de autovalores complexos conjugados no espectro, tal EDP é um tipo híbrido parabólico/hiperbólico (Krstić and Smyshlyayev, 2008).

1.1 Notação e Terminologia

Denotam-se as derivadas parciais de uma função $u(x, t)$ como $\partial_x u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$, $\partial_t u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$. Convenientemente, usa-se a forma compacta $u_x(x, t)$ e $u_t(x, t)$ para o primeiro e último, respectivamente. O subíndice av é utilizado para denotar o valor médio de uma variável periódica com período T . A norma-2 de um vetor de estado $X(t)$ de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples $|X(t)|$. Conforme definido em (Khalil, 2002), uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dita ser de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ sobre um intervalo $[t_1, t_2]$, se existe k e $\bar{\epsilon}$ positivos tal que $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon$, $\forall t \in [t_1, t_2]$ e $\forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$. Na maioria dos casos, não são fornecidas estimativas precisas para as constantes k e $\bar{\epsilon}$, e usa-se $\mathcal{O}(\epsilon)$ para ser interpretada como uma relação de ordem de grandeza para ϵ suficientemente pequeno.

1.2 Exemplo de Motivação para Busca Embaixo D'água

O objetivo desta subsecção é trazer uma conexão da estratégia proposta de ES para uma aplicação do mundo real, enquanto o foco principal deste trabalho é buscar projetos e análises de estabilidade de ES realimentado sujeitas a dinâmicas de atuação do tipo EDP de onda com amortecimento Kelvin-Voigt.

A Figura 1 apresenta um diagrama deste estudo de caso, que consiste em uma aplicação de busca pela fonte (ou *source seeking*) acionada por cabos em águas profundas, com um sensor pendurado em um cabo e movido através do cabo a partir da superfície do mar usando a superfície da embarcação. Assume-se que o sensor é privado do conhecimento da posição devido ao ambiente marinho e a tarefa é localizar o mais próximo possível do sinal da fonte.

O algoritmo proposto neste artigo visa ser aplicável a tal cenário de busca pela fonte e, além de encontrar o sinal da fonte, estabiliza o movimento do cabo. Note que quanto mais longo o cabo (ou mais profunda a fonte do sinal), menor é a frequência natural do cabo, e consequentemente, menor será o movimento da embarcação necessário para estabilizar o sistema. Entretanto, a memória do sistema exigida no algoritmo de busca extremal será maior.

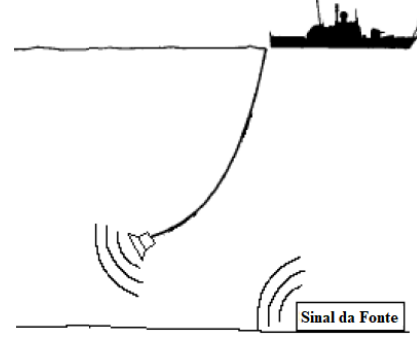


Figura 1. Exemplo de motivação - busca embaixo d'água.

O cabo nesta aplicação pode ser representado pela seguinte EDP sobre um intervalo $x \in [0, 1]$ (Krstić and Smyshlyayev, 2008):

$$\varepsilon u_{tt} = (1 + d\partial_t)u_{xx}, \quad (1)$$

$$u_x(0) = 0, \quad (2)$$

$$u(1) = \Theta(t), \quad (3)$$

no qual ε e d são constantes positivas. O valor $1/\varepsilon$ representa a rigidez da corda e é dado pela expressão E/ρ , com E sendo o módulo de Young e ρ a densidade do material. O termo $d\partial_t$ modela o amortecimento “Kelvin-Voigt”, que expressa o amortecimento interno do material (não o amortecimento que surge devido à interação viscosa da corda com o meio circundante). Assume-se apenas que uma pequena quantidade de d , que ocorre em qualquer material realista, é levada em consideração no modelo.

As equações (1)-(3) modelam a dinâmica da corda controlada na extremidade em $x = 1$, presa à embarcação de superfície e com extremidade livre em $x = 0$, onde o sensor está localizado. O termo Kelvin-Voigt não é considerado como fonte de dissipação de energia, em vez disso, é utilizado como meio de controlabilidade do modelo (1)-(3).

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Controle Extremal do Tipo Gradiente

O objetivo do ES é otimizar um mapeamento estático quadrático não linear desconhecido $Q(\cdot)$ usando um controle de otimização em tempo real com uma saída ótima desconhecida y^* e otimizador θ^* , saída mensurável y e entrada Θ . O método de ES empregado é baseado na perturbação senoidal (Krstić and Wang, 2000), considerando problema de maximização de tal maneira que a entrada varia para estimar o Gradiente do mapeamento. Os sinais de perturbação são dados abaixo:

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t), \quad (4)$$

Com amplitude a e frequência ω adicionadas à estimativa do otimizador θ^* , que é dada por $\hat{\theta}$. Ambos os sinais são escolhidos a fim de obter a estimativa do Gradiente $G(t)$ de um mapeamento $Q(\cdot)$ estático localmente quadrático. Dados $G_{av}(t) = H\hat{\Theta}_{av} = H(\hat{\Theta}_{av} - \Theta^*)$, no qual H é a Hessiana negativa desconhecida do mapeamento estático e $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta^*$ o erro de estimação, o sistema médio é $\dot{\tilde{\Theta}}_{av} = KH\tilde{\Theta}_{av}$, com ganho de adaptação $K > 0$. Portanto,

o sistema médio é exponencialmente estável conforme o Teorema da Média (Khalil, 2002).

2.2 Dinâmicas de Atuação e Sinal de Saída

Agora, consideram-se as dinâmicas de atuação descritas por uma equação de onda contendo amortecimento Kelvin-Voigt com $\varepsilon = 1$, $\theta(t) \in \mathbb{R}$ e atuador propagado $\Theta(t) \in \mathbb{R}$ dado por:

$$\Theta(t) = \alpha(0, t), \quad (5)$$

$$\partial_{tt}\alpha(x, t) = \partial_{xx}\alpha(x, t) + d\partial_{xxt}\alpha(x, t), \quad (6)$$

$$\partial_x\alpha(0, t) = 0, \quad (7)$$

$$\alpha(D, t) = \theta(t), \quad (8)$$

onde $\alpha : x \in [0, D]$, no qual D é o comprimento do domínio conhecido. A saída é medida pelo seguinte mapeamento estático desconhecido com entrada (5):

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (9)$$

O mapeamento desconhecido é localmente quadrático, tal que:

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (10)$$

no qual $\Theta^*, y^* \in \mathbb{R}$ e $H < 0$. Portanto, a saída do mapeamento estático é dada por:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (11)$$

Adaptando o esquema proposto em Oliveira et al. (2017b) e combinando (5)-(8) com a abordagem de ES na Seção 2.1, o ES em malha fechada com dinâmicas de atuação governadas por uma EDP do tipo Kelvin-Voigt é mostrada na Figura 2.

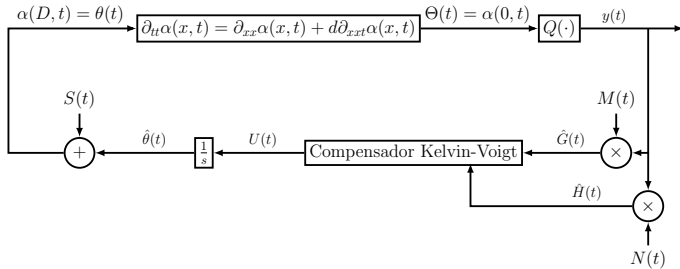


Figura 2. Malha de ES do tipo Gradiente.

2.3 Sinais e Sistema

O sinal de perturbação aditiva $S(t)$ é adaptado do esquema básico de ES descrito na Seção 2.1 para o caso de dinâmicas de atuação. O problema de geração de trajetória como em (Krstić and Smyshlyaev, 2008, Chapter12) é descrito como:

$$S(t) := \beta(D, t), \quad (12)$$

$$\partial_{tt}\beta(x, t) = \partial_{xx}\beta(x, t) + d\partial_{xxt}\beta(x, t), \quad (13)$$

$$\partial_x\beta(0, t) = 0, \quad (14)$$

$$\beta(0, t) = a \sin(\omega t), \quad (15)$$

no qual $\beta : [0, D] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. A solução explícita de (12) é encontrada para a trajetória de referência:

$$\beta(0, t) := u^r(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (16)$$

Em Laroche et al. (1998), a solução da equação da referência foi calculada a partir de uma série de potência, i.e., $u^r(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) \frac{x^i}{i!}$. A expressão explícita é dada por

$$u^r(x, t) = -a \frac{j}{2} [\cosh(j\sigma x) e^{j\omega t} - \cosh(j\bar{\sigma} x) e^{-j\omega t}], \quad (17)$$

com $\sigma = \frac{\omega}{\sqrt{1+j\omega d}}$. Note que (17) pode ser escrita como uma função puramente real

$$u^r(x, t) = \frac{a}{2} \left[e^{\hat{\beta}(\omega)x} \sin(\omega t + \bar{\beta}(\omega)x) + e^{-\hat{\beta}(\omega)x} \sin(\omega t - \bar{\beta}(\omega)x) \right], \quad (18)$$

onde as funções $\bar{\beta}(n)$ e $\hat{\beta}(n)$ são definidos como:

$$\bar{\beta}(n) = n \sqrt{\frac{\sqrt{1+n^2d^2} + 1}{2(1+n^2d^2)}}, \quad (19)$$

$$\hat{\beta}(n) = n \sqrt{\frac{\sqrt{1+n^2d^2} - 1}{2(1+n^2d^2)}}. \quad (20)$$

Como o objetivo consiste em encontrar Θ^* , que corresponde ao atuador ótimo desconhecido, introduzem-se os seguintes estimadores e erros de estimação:

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - S(t), \quad \hat{\Theta}(t) = \Theta(t) - a \sin(\omega t), \quad (21)$$

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \Theta^*, \quad \vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*. \quad (22)$$

Seja $\bar{\alpha} : [0, D] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\bar{\alpha}(x, t) := \alpha(x, t) - \beta(x, t) - \Theta^*$. Manipulando (5)-(8) e (12)-(15) com a ajuda de (21) e (22), tem-se:

$$\vartheta(t) = \bar{\alpha}(0, t), \quad (23)$$

$$\partial_{tt}\bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x, t) + d\partial_{xxt}\bar{\alpha}(x, t), \quad (24)$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(0, t) = 0, \quad (25)$$

$$\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t). \quad (26)$$

As dinâmicas do erro propagadas podem ser calculadas tomando a derivada em relação ao tempo de (23)-(26),

Sejam $u(x, t) := \bar{\alpha}_t(x, t)$ e $U(t) := \dot{\tilde{\theta}}(t)$. Então, o sistema (23)-(26) pode ser reescrito como:

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (27)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t) + d\partial_{xxt}u(x, t), \quad (28)$$

$$\partial_xu(0, t) = 0, \quad (29)$$

$$u(D, t) = U(t). \quad (30)$$

O sinal de demodulação $N(t)$, que é usado para estimar a Hessiana do mapeamento estático multiplicando com a saída $y(t)$ do mapeamento estático, é definido em Ghaffari et al. (2011) através da seguinte expressão:

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t), \quad \text{com } N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (31)$$

3. PROJETO DO CONTROLADOR

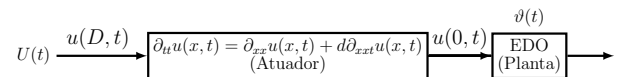


Figura 3. A cascata de dinâmicas de EDP e a EDO.

Considere a seguinte transformação *backstepping* (Krstic, 2009) a ser aplicada no sistema em cascata EDP-EDO mostrado na Figura 3:

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - \bar{K} \int_0^x k(x, \sigma) u_{av}(\sigma, t) d\sigma - \bar{K} \vartheta_{av}(t). \quad (32)$$

Diferenciando (32) com relação ao tempo e ao espaço, integrando por partes e substituindo (27)-(30), tem-se que o seguinte sistema alvo

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = \bar{K} \vartheta_{av}(t) + w(0, t), \quad \bar{K} < 0, \quad (33)$$

$$w_{tt} = (1 + d\partial_t)(w_{xx} - cw), \quad c > 0, \quad (34)$$

$$w_x(0) = 0, \quad (35)$$

$$w(D) = 0, \quad (36)$$

na qual o kernel de (32) deve satisfazer a seguinte EDP (Krstić and Smyshlyaev, 2008, p. 86):

$$k_{xx} = k_{\sigma\sigma} + ck, \quad (37)$$

$$k_{\sigma}(x, 0) = 0, \quad (38)$$

$$k(x, x) = \frac{c}{2}x. \quad (39)$$

O sistema de equações (37)-(39) possui a seguinte solução analítica:

$$k(x, \sigma) = -cx \frac{I_1\left(\sqrt{c(x^2 - \sigma^2)}\right)}{\sqrt{c(x^2 - \sigma^2)}}, \quad (40)$$

no qual I_1 é a função de Bessel modificada dada no Apêndice A.

Assim sendo, de (32)-(36), a lei de controle média dada por:

$$u_{av}(t) = \bar{K} \vartheta_{av}(t) - \bar{K} \int_0^D cD \frac{I_1\left(\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}\right)}{\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}} u_{av}(\sigma, t) d\sigma. \quad (41)$$

Portanto, introduzindo um resultado de Ghaffari et al. (2011), a versão média do Gradiente e estimativa da Hessiana são calculadas para:

$$G_{av}(t) = H \vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av}(t) = H. \quad (42)$$

A partir de (30) e (41), escolhendo $\bar{K} = KH$ com $K > 0$ e conectando a média do Gradiente e estimativa da Hessiana (42), obtém-se:

$$U_{av}(t) = KG_{av}(t) - KH \int_0^D cD \frac{I_1\left(\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}\right)}{\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}} u_{av}(\sigma, t) d\sigma. \quad (43)$$

Introduz-se um filtro passa baixas para obter a versão não média do controlador:

$$U(t) = \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ K \left[G(t) - \hat{H}(t) \int_0^D cD \frac{I_1\left(\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}\right)}{\sqrt{c(D^2 - \sigma^2)}} u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (44)$$

com $\bar{c} \rightarrow +\infty$ suficientemente grande.

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Sem perda de generalidade, considere $D = 1$. Então, o enésimo par de autovalores σ_n do subsistema (34)-(36) satisfaz a equação quadrática:

$$\sigma_n^2 + d \left[c + \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2 \right] \sigma_n + \left[c + \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2 \right] = 0, \quad (45)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Através de (45), pode-se notar que existem dois conjuntos de autovalores: o primeiro conjunto de autovalores, dado por valores pequenos de n , está alocado na borda da circunferência de centro $(-1/d, 0)$ e raio $1/d^2$, definida pela seguinte equação

$$\left(\operatorname{Re}(\sigma_n) + \frac{1}{d} \right)^2 + (\operatorname{Im}(\sigma_n))^2 = \frac{1}{d^2}. \quad (46)$$

O outro conjunto de autovalores contém apenas autovalores reais, sendo que eles se acumulam no ponto $-1/d$ e os outros tendem a $-\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

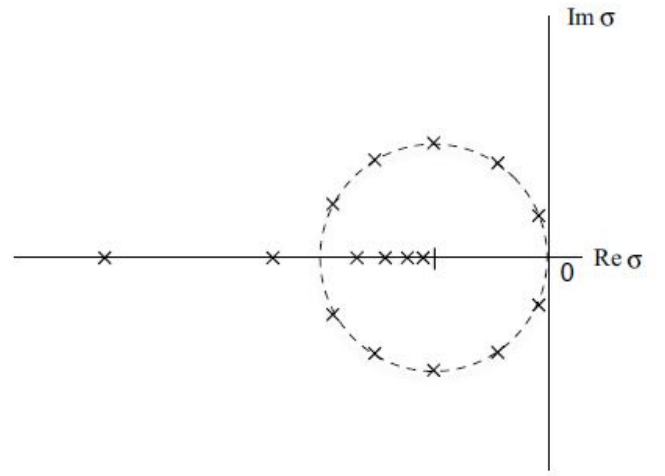


Figura 4. Autovalores em malha aberta para equação de onda com amortecimento Kelvin-Voigt.

Os autovalores em malha aberta ($c = 0$) são apresentados na Figura 4. Aumentando os valores de c , os autovalores se movem na borda da circunferência na direção real negativa diminuindo sua quantidade na circunferência (em última análise eles se tornam reais). Com valores elevados de c , todos os autovalores podem ser reais. Do ponto de vista do desempenho do sistema de controle, valores elevados de c não são adequados, dado que a resposta transitória não será adequada. Portanto, a flexibilidade de aperfeiçoar o amortecimento do sistema usando a transformação *backstepping* e o controlador deve ser usada de forma criteriosa, com baixos valores de c se d já for relativamente alto.

Note que o fato dos autovalores de (34)-(36) estarem localizados no semiplano esquerdo do plano complexo implica que (34)-(36) é exponencialmente estável (Karafyllis and Krstic, 2018). Isso garante que (33) possui estabilidade entrada-estado com relação a $w(0, t)$, pois $w(0, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Por fim, $\vartheta_{av}(t)$ é exponencialmente estável dado que \bar{K} é negativo por definição.

Seguindo passos análogos dados em Oliveira et al. (2017a), empregando a teoria da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990), pode-se provar que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}\left(ae^{\hat{\beta}(\omega)D} + 1/\omega\right), \quad (47)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (48)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (49)$$

Uma prova detalhada de tais resultados será deixada para uma futura publicação em periódico.

5. SIMULAÇÕES

A simulação numérica utiliza como referência o mapeamento quadrático descrito em (10) e os parâmetros são escolhidos conforme a Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros de simulação.

	Símbolo	Descrição	Valor
Parâmetros do Controlador	K	ganho do controlador	0.3
	a	ganho de perturbação	0.1
	ω	freq. de perturbação [rad/s]	8
	c	freq. do controlador [rad/s]	10
Parâmetros do sistema	D	domínio	1
	Θ^*	otimizador do mapa estático	8
	y^*	valor ótimo do mapa estático	64
	H	hessiana do mapa estático	-1
	d	coeficiente Kelvin-Voigt	0.1

As Figuras 5 e 6 correspondem aos gráficos numéricos da convergência do sistema em malha fechada num espaço tridimensional, considerando o domínio $x \in [0, D]$ e o tempo t . Verificam-se que os sinais Θ e θ convergem para a vizinhança próxima do otimizador $\Theta^* = \theta^* = 8$.

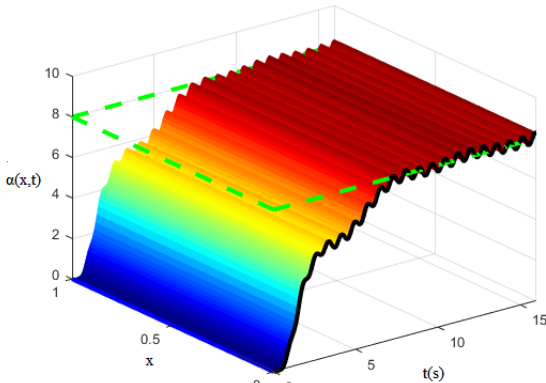


Figura 5. Convergência do estado $\alpha(x,t)$ em um espaço tridimensional. Em preto, verifica-se $\Theta(t) = \alpha(0,t)$ alcançando uma vizinhança de Θ^* .

Uma análise similar do último parágrafo é feita na Figura 7. Ambos os sinais Θ e θ são considerados no mesmo gráfico bidimensional, considerando apenas o tempo t . É mais fácil visualizar o comportamento descrito pela vizinhança de convergência dos otimizadores.

Por último, as Figs. 8 e 9 mostram a convergência da saída $y(t)$ para y^* e $U(t)$ para 0, respectivamente.

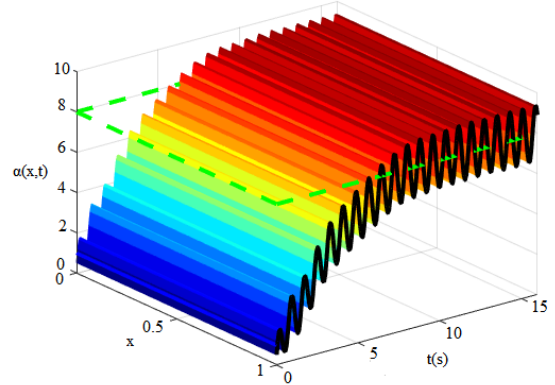


Figura 6. Convergência do estado $\alpha(x,t)$ em um espaço tridimensional. Em preto, verifica-se $\theta(t) = \alpha(D,t)$ convergindo para a vizinhança de Θ^* .

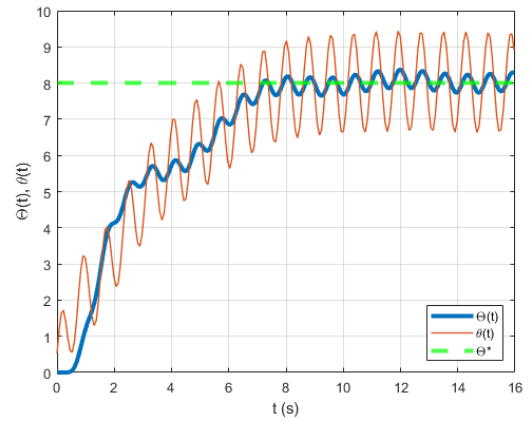


Figura 7. Convergência dos sinais $\Theta(t)$ e $\theta(t)$ para Θ^* .

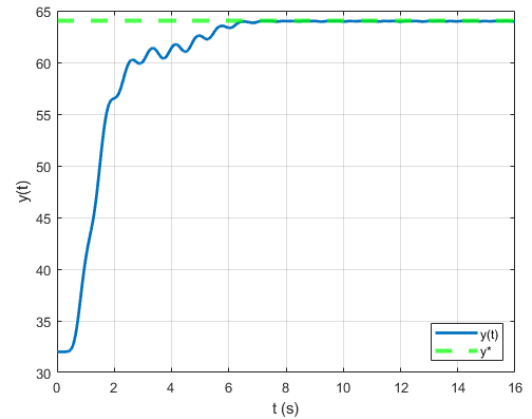


Figura 8. Convergência da saída $y(t)$ para y^* .

6. CONCLUSÃO

A metodologia proposta maximiza o mapeamento quadrático estático buscando o Θ^* ótimo. Embora as dinâmicas de atuação devam ser conhecidas, nenhuma informação é assumida dos parâmetros do mapeamento. A lei de controle média para compensar as dinâmicas empregou o controle de contorno de EDPs via metodologia *backstepping*.

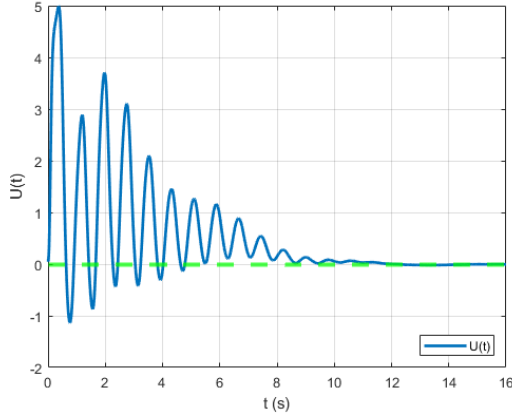


Figura 9. Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0.

Por fim, a estabilidade exponencial local e convergência para uma pequena vizinhança foram garantidas. Embora forças internas do cabo sejam consideradas no modelo, representadas pelas variáveis viscoelásticas ε e d , não foram consideradas forças externas geradas pela interação do cabo com o meio circundante, que inclui o arrasto hidrodinâmico, efeitos de peso e flutuabilidade (Buckham, 1997). Apesar disso, o projeto do algoritmo de ES e análise de estabilidade podem ser usados em trabalhos futuros para demonstrar a capacidade da metodologia proposta de busca extremal em resolver alguns problemas específicos de otimização em tempo real em cenários de busca embaixo d'água.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao CNPq e à FAPERJ pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- Ariyur, K. and Krstić, M. (2003). Real-time optimization by extremum-seeking control.
- Buckham, B. (1997). *Dynamics modelling of low-tension tethers for submerged remotely operated vehicles*. Master's thesis, University of Victoria.
- Ghaffari, A., Krstić, M., and Neić, D. (2011). Multivariable newton-based extremum seeking. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 4436–4441.
- Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2018). *Input-to-state stability for PDEs*. Springer.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall.
- Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhauser.
- Krstić, M., Siranosian, A.A., Balogh, A., and Guo, B.Z. (2007). Control of strings and flexible beams by backstepping boundary control. *2007 American Control Conference*, 882–887.
- Krstić, M. and Smyshlyaev, A. (2008). Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs.
- Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Autom.*, 36, 595–601.
- Laroche, B., Martin, P., and Rouchon, P. (1998). Motion planning for a class of partial differential equations with boundary control. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)*, 3, 3494–3497 vol.3.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*.
- Manzie, C. and Krstić, M. (2009). Extremum seeking with stochastic perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 580–585.
- Oliveira, T.R. and Krstic, M. (2022). *Extremum Seeking through Delays and PDEs*. SIAM.
- Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2017a). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.
- Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2017b). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.
- Tan, Y., Moase, W., Manzie, C., Neić, D., and Mareels, I. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, 14–26.

Apêndice A. FUNÇÃO DE BESSEL MODIFICADA

A função $y(x) = I_n(x)$ é uma solução para a seguinte EDO:

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x - (x^2 + n^2)y = 0. \quad (\text{A.1})$$

Representação em séries:

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!}. \quad (\text{A.2})$$

Relação com a função clássica de Bessel $J_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad I_n(ix) = i^n J_n(x). \quad (\text{A.3})$$

Propriedades:

$$2nI_n(x) = x(I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)), \quad (\text{A.4})$$

$$I_n(-x) = (-1)^n I_n(x). \quad (\text{A.5})$$

Diferenciação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I_n(x) &= \frac{1}{2}(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) \\ &= \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n I_n(x)) &= x^n I_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} = (x^{-n} I_n(x)) \\ &= x^{-n} I_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Propriedades assintóticas:

$$I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{A.8})$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.9})$$