

# Proposta de Metodologia para Simulação do Fenômeno *Inrush* em Transformadores de Potência Monofásicos Utilizando BDF2 e Método de Newton-Raphson.

David Lopes Pires\* Fernando Augusto Moreira\*\*  
Matheus Garcia Soares\*\*\*

\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, BA, (e-mail: davidpires@ufba.br).

\*\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, BA, (e-mail: moreiraf@ufba.br).

\*\*\* Departamento de Engenharias e Computação, Universidade Estadual de Santa Cruz, BA, (e-mail: mgsoares@uesc.br).

---

**Abstract:** There are different methodologies applied to simulate the inrush phenomenon in power transformers. Generally, these differ from each other with regard to the technique used to model the saturation curve, the numerical method used to discretize the system and the technique used to solve the problem. Depending on the techniques and methods employed in these processes, the solution to the problem may or may not present problems regarding accuracy, numerical stability, and computational efficiency. In this work, a methodology is proposed so that it eliminates or at least reduces the three previously mentioned problems. This methodology is described step-by-step. The proposal consists in modeling the saturation curve by true nonlinear equations, discretizing the system using the second-order BDF method and obtaining the solution using the Newton-Raphson method. This proposal proved to be effective with regard to the three parameters mentioned. In addition, examples of limitations arising from known methodologies were presented, in order to elucidate the advantages of the proposal.

**Resumo:** Existem diferentes metodologias aplicadas para simulação do fenômeno *inrush* em transformadores de potência. De forma geral, estas se diferem principalmente com relação à técnica empregada para modelagem da curva de saturação, o método numérico utilizado para discretização do sistema e a técnica utilizada para solução do problema. A depender das técnicas e métodos empregados nestes processos, a solução para o problema pode ou não apresentar inconvenientes tais como imprecisão, instabilidade numérica e ineficiência computacional. Neste trabalho, é proposta uma sequência de etapas para aplicação de uma metodologia que visa suprimir ou ao menos reduzir estes três tipos de problema. A proposta consiste em modelar a curva de saturação através de equações não lineares, discretizar o sistema por meio do método BDF de ordem 2 e obter a solução através do método de Newton-Raphson. Tal proposta se mostrou eficaz com relação aos três parâmetros citados. Além disso, prezou-se por demonstrar exemplos de limitações provenientes de outras metodologias conhecidas, a fim de elucidar as vantagens da atual proposta.

**Keywords:** electromagnetic transients; inrush current; numerical methods; power transformers; transient analysis.

**Palavras-chaves:** análise transitória; corrente de *inrush*; métodos numéricos; transformadores de potência; transitórios eletromagnéticos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho parte-se do conhecimento de que há uma ampla gama de metodologias voltadas à simulação do fenômeno *inrush*. Sabe-se que tais metodologias envolvem uma série de etapas interconectadas, de tal forma que cada etapa apresenta suas particularidades que requerem devida atenção a fim de que as simulações atendam a critérios en-

volvendo parâmetros como precisão, estabilidade numérica e eficiência computacional (Jazebi, 2015).

Estes parâmetros avaliativos referem-se, respectivamente à: acurada representação do sinal em termos de continuidade da função e correto cômputo das grandezas elétricas calculadas, atenuação de oscilações numéricas e tempo reduzido para simulação do problema. Isto posto, este trabalho diz respeito a exposição detalhada de uma proposta com vistas a simular o fenômeno *inrush* em transformadores de potência monofásicos, a qual apresenta bom

---

\* Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código 001.

desempenho com relação aos três parâmetros avaliativos citados anteriormente.

As etapas que compõem a metodologia proposta englobam os seguintes pontos fundamentais: a técnica empregada na modelagem da curva de saturação do transformador, o método numérico empregado na discretização do sistema e o método utilizado para solucionar as equações que o descrevem. Para que se tenha um bom desempenho de simulação é preciso que cada uma destas etapas seja elaborada com cuidado, utilizando-se técnicas e métodos adequados (Benšić, 2018).

Introdutoriamente, cabe mencionar que o fenômeno *inrush* é conhecido por ter o potencial de produzir interferências no sistema. Dentre estas interferências, cabe destacar a produção de estresses mecânicos nos enrolamentos do transformador, danificação de isolamentos em dispositivos e operação indevida de relés de proteção diferenciais (Liqun, 2019).

Além disso pode provocar também problemas relacionados à qualidade da energia, como a geração de distorções harmônicas e a criação de afundamentos de tensão (Jazebi, 2015), fazendo-se de igual importância também não só o correto cômputo da corrente de *inrush*, mas dos níveis de tensão aplicados ao transformador.

Portanto, afirma-se a importância de se estabelecer uma boa metodologia para simulação deste fenômeno, principalmente no que diz respeito ao cômputo correto dos níveis de corrente e tensão aos quais o transformador está sujeito (Halim, 2016). Pode-se dizer que a metodologia proposta é uma síntese da contribuição de outros autores, principalmente no que diz respeito às etapas que a compõem.

Contudo, a estrutura completa da metodologia da forma apresentada neste trabalho não foi demonstrada previamente em sua completude. De maneira geral, a proposta consiste em modelar a curva de saturação através de equações não lineares, discretizar o sistema através do método numérico BDF (*backward differentiation formula*) de ordem 2 e solucionar o problema através do método numérico de Newton-Raphson.

Por fim, sobre a estrutura, a segunda seção do trabalho visa explorar o estado da arte referente ao tema tratado. Já a terceira seção demonstra a metodologia adotada, com foco em detalhar a sequência de etapas necessárias para sua aplicação. Ainda, a quarta seção visa aplicar a metodologia à análise de um transformador específico, identificando os resultados e comparando com os resultados provenientes da simulação através de outras metodologias conhecidas da literatura. Por último, a quinta seção tem por objetivo concluir o trabalho e apresentar sugestões de pesquisas futuras.

## 2. ESTADO DA ARTE

Existem diferentes tipos de metodologias empregadas na simulação computacional do fenômeno *inrush* em transformadores. Aqui, busca-se apresentar algumas das possibilidades existentes na literatura, com destaque às limitações das mesmas. Nesse contexto, uma das metodologias mais conhecidas consiste em modelar a curva de saturação através da técnica de linearização por trechos, discreti-

zar o sistema através do método numérico de integração trapezoidal e solucionar as equações através da técnica conhecida como método da compensação (Dommel, 1969).

A linearização por trechos é uma maneira de aproximar o comportamento da curva não linear (característico da curva de saturação do transformador) à uma curva composta por uma série de trechos lineares (Dommel, 1969).

Além disso, a discretização do sistema através da integração trapezoidal consiste em substituir os elementos de circuito de um sistema por elementos equivalentes apropriados para solução através da análise nodal. A solução se baseia na discretização no tempo em intervalos regulares definidos por um passo de tempo (Zanetta, 2020).

Nesse sentido, vale apontar que a integração trapezoidal é um método muito utilizado em programas do tipo EMT (*Electromagnetic Transients*), ou seja, voltados para a análise de transitórios.

Por fim, (Dommel, 1969) demonstra que uma técnica de solução para esse tipo de modelagem da curva e discretização do sistema consiste em aplicar o chamado método da compensação. A Figura 1 apresenta de forma detalhada a metodologia citada, destacando a técnica de solução.

O método consiste em comparar a tensão no elemento não linear que caracteriza a saturação  $f(i_{km})$ , com a tensão equivalente vista pelos seus terminais  $V_k - V_m$ . Por meio dessa comparação é possível distinguir, a cada intervalo de solução, o valor da corrente que flui pelo circuito  $i_{km}$ .

No caso de um transformador, o elemento não linear é modelado através de uma indutância não linear  $L_m$  que representa o comportamento da saturação do núcleo. Já o sistema linear seria composto pelos elementos vistos pelos terminais da indutância não linear, traduzidos por um equivalente de Thévenin, por exemplo (Patel, 2013).

Em linhas gerais, a metodologia mencionada pode apresentar, na maioria das vezes, comportamento razoável em termos de precisão e estabilidade numérica, principalmente devido ao método numérico adotado (Dommel, 1969). Contudo, a técnica empregada na modelagem da curva pode ser fonte de imprecisões e descontinuidades durante a solução do problema.

Isso pode acontecer caso a quantidade de trechos lineares empregada para descrever a curva seja insuficiente na representação de seu comportamento ou caso o passo de tempo adotado não seja capaz de amostrar bem o sinal. Neste segundo caso, acontece um problema chamado amortecimento negativo, descrito pela Figura 2.

Por conta destas insuficiências, o trecho detectado em uma determinada solução pode ser um trecho muito descontínuo com relação ao trecho detectado na solução anterior. Na imagem, isso é demonstrado pela mudança abrupta do trecho 2 para o trecho 3.

Caso a mudança ocorresse do trecho 2 para um trecho mais próximo, evitaria-se problemas de descontinuidade. Se o passo de tempo for menor, essas descontinuidades podem ser menos abruptas já que o sinal terá maior amostragem, evitando a criação de um tipo de histerese artificial (Dommel, 1969).

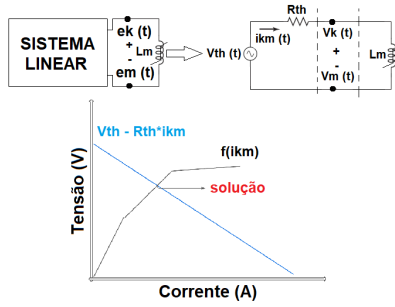


Figura 1. Solução via método da compensação.

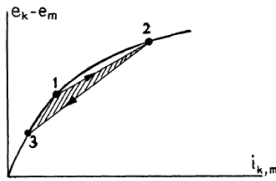


Figura 2. Amortecimento negativo (Dommel, 1969).

Essa histerese artificial, representada pela mudança dos pontos de operação de maneira descontínua, se manifestará na forma de imprecisões no cômputo dos níveis de corrente e tensão do sistema, fazendo com que surjam descontinuidades nos gráficos que descrevem essas grandezas elétricas.

Além disso, podem surgir problemas de oscilações numéricas caso o método numérico utilizado para discretização seja o método trapezoidal (Dommel, 1969). Ainda, o método da compensação por si só exige uma grande quantidade de operações, que vão desde o cálculo do sistema linear equivalente, até a detecção do trecho linearizado correspondente à um dado instante.

Em linhas gerais, isso se manifesta como um maior esforço computacional e, conseqüentemente, perda de eficiência da simulação (quando comparado com outras metodologias com objetivos de simular o mesmo problema).

De forma complementar, uma das maneiras para simular o fenômeno *inrush* utilizando a mesma metodologia citada anteriormente pode se dar através do uso de programas do tipo EMT. Nesse contexto, por exemplo, *softwares* como o ATP (*Alternative Transient Program*) são capazes de modelar a curva de saturação através de uma indutância não linear.

Tal representação é realizada ponto-a-ponto, a fim de representar uma curva linearizada por trechos, permitindo a solução do problema através do método da compensação, discretizando previamente o sistema através da integração trapezoidal (Chiesa, 2010).

Porém, como já mencionado, este tipo de técnica está sujeita a possíveis imprecisões numéricas, de tal forma que uma solução para este problema seria ou a redução do passo de tempo da solução, ou a prévia especificação de limites de distância permissíveis entre os pontos que delimitam cada trecho linearizado, visando atenuação das imprecisões.

Sobre o método de integração trapezoidal, trata-se de um método vantajoso no sentido de ter um baixo erro de truncamento local e boa estabilidade numérica em muitas

condições, sendo um método A-estável, caracterizado por não apresentar instabilidade numérica (Thompson, 1992). Contudo, métodos apenas A-estáveis não são capazes de atenuar os chamados componentes de decaimento rápido, e isso pode provocar, em alguns casos, oscilações numéricas durante a solução.

Portanto, o método de integração trapezoidal está sujeito a oscilações numéricas em alguns casos, principalmente quando o sistema a ser analisado é considerado um sistema rígido. Em linhas gerais, um sistema rígido se caracteriza por apresentar autovalores muito diferentes entre si em termos de ordem de grandeza (Tokic, 2021).

Nesse contexto, o ATP, por exemplo, não contém diretamente o mecanismo de amortecimento de oscilações numéricas, conhecido como CDA (*Critical Damping Adjustment*), sendo esta uma importante desvantagem do uso desse programa. Em alguns casos é necessário utilizar versões de *softwares* do tipo EMT como o PSCAD-EMTDC, onde é possível acionar a função CDA.

Essa função elimina oscilações numéricas através da aplicação de dois passos de tempo utilizando o método de integração de Euler Reverso, sendo que cada um dos passos tem metade do tamanho do passo original do método trapezoidal (Martí, 1989). Neste sentido, o método de Euler Reverso não é um método suscetível à este problema já que se trata de um método L-estável, que tem por característica impedir que ocorram oscilações numéricas ao redor da solução correta.

Outra possibilidade de metodologia, exposto em (Tokic, 2013), visa modelar a curva de saturação via “pontos de operação”, utilizar o método numérico conhecido como BDF 2 (*Backward Differentiation Formula* de ordem 2) para discretizar o sistema, e solução do problema via variáveis de estado.

O método numérico sugerido também é conhecido como método numérico de segunda ordem de Gear. Além disso, é válido apontar que o método BDF de ordem 1 é o próprio método de Euler Reverso, que apesar de ser L-estável apresenta um erro de truncamento considerável, não sendo adequado para simulações longas.

No caso da metodologia citada, a curva é descrita em termos de pares ordenados de fluxo e corrente. Cada par ordenado é equivalente a um “ponto de operação”. No entanto, nesta modelagem também há a possibilidade do surgimento de imprecisões e descontinuidades pelo fato de que, durante a solução, é necessário alterar o ponto de operação a fim de adequar ao comportamento do transformador naquele dado instante.

Nesse sentido, há de se apontar que as duas maneiras já citadas, no que diz respeito à modelagem da curva de saturação, estão sujeitas muitas vezes à parâmetros subjetivos, como quais seriam as quantidades “ideais” de trechos linearizados e/ou pontos de operação.

Uma maneira de corrigir imprecisões originadas por essa forma de modelar a curva seria através da diminuição do passo de tempo ou do aumento do número de pontos de operação. Em ambos os casos, a solução pode se tornar mais demorada, ou seja, menos eficiente. Além disso, (Tokic, 2021) demonstra que transformadores podem, muitas

vezes, serem caracterizados como sistemas rígidos, principalmente pelo fato de que grandezas como a resistência do núcleo são muito maiores quando comparadas com outras grandezas que definem o circuito de um transformador. Um exemplo de oscilações numéricas que podem surgir na simulação do fenômeno *inrush* em transformadores pode ser visto na Figura 3.

Neste caso, utilizou-se o método numérico de integração trapezoidal. Caso fosse utilizado o método BDF2, esse problema não aconteceria (Tokic, 2013). Além disso, a solução do problema via variáveis de estado pode ser muito útil e eficiente, principalmente pelo fato de que a quantidade de operações numéricas envolvidas na solução é menor quando comparado, por exemplo, com o método da compensação (Tokic, 2013).

Por fim, uma outra possibilidade de metodologia explorada principalmente em trabalhos como (Jazebi, 2015), visa modelar a curva de saturação através de equações não lineares, e não através de pontos de operação ou trechos linearizados. O autor sugere a discretização do sistema através do método de integração trapezoidal e solução do problema através do método de Newton-Raphson. Em linhas gerais, a curva de saturação é modelada através da adaptação da chamada Equação de Frolich (Zocholl, 1996), dada por:

$$\lambda = \frac{i}{\frac{1}{\mu_0 \mu_{ir}} \frac{L}{N^2 A_l} + \frac{1 - \frac{1}{\mu_{ir}}}{B_{sat}} N A_l |i|} \quad (1)$$

Na equação,  $\mu_0$ ,  $\mu_{ir}$ ,  $N$ ,  $A_l$ ,  $L$ ,  $i$  e  $B_{sat}$  representam, respectivamente, permeabilidade magnética do vácuo e relativa inicial, número de espiras, área da seção transversal do núcleo magnético, comprimento do percurso magnético do núcleo, corrente de magnetização e densidade de fluxo magnético de saturação (Zocholl, 1996).

Além disso, (Høidalen, 2011) sugere que se realize um ajuste na inclinação final da curva, justamente no trecho que simboliza a saturação do material. Tal ajuste nada mais é que um complemento à (1), e pode ser visto abaixo. Esta consideração é necessária principalmente caso se deseje simular fenômenos que dependem fortemente da saturação do material, como é o caso do *inrush* em transformadores.

$$\lambda = \frac{i}{\frac{1}{\mu_0 \mu_{ir}} \frac{L}{N^2 A_l} + \frac{1 - \frac{1}{\mu_{ir}}}{B_{sat}} N A_l |i|} + \mu_0 \frac{N^2 A_l}{L} \quad (2)$$

Caso o ajuste não seja realizado, o cômputo dos níveis da corrente de energização pode ser muito impreciso. Nesse contexto, a Figura 4 simboliza a diferença da curva de saturação modelada quando se considera ou não o ajuste da inclinação final.

Portanto, a curva de saturação pode ser modelada a partir de duas equações, uma que representa o trecho corresponde a operação em regiões de não saturação até regiões iniciais de saturação (1) e outra para regiões de saturação mais elevada (2). Além disso, (Jazebi, 2015) sugere que se aplique a discretização do sistema a partir da integração trapezoidal e se extraia as equações que descrevem o comportamento daquele sistema.

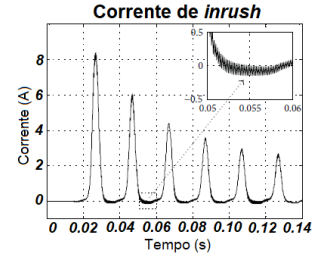


Figura 3. Oscilações em sistemas rígidos (Tokic, 2013).

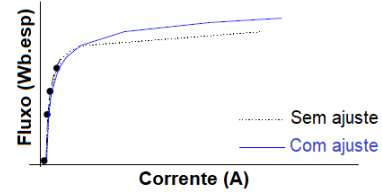


Figura 4. Ajuste na inclinação final (Høidalen, 2011).

Feito isso, aplica-se o método numérico de Newton-Raphson para solução de um sistema de equações, composto tanto pela equação não linear que descreve o comportamento de saturação do núcleo, quanto pelas equações extraídas do sistema e que representam seu comportamento.

Nesse contexto, a forma como a curva é modelada nestes casos é menos suscetível a imprecisões do que quando se utiliza trechos lineares ou pontos de operação, haja vista que a possibilidade de descontinuidades é muito menor.

Além disso, a solução via Newton-Raphson pode se mostrar muito eficiente quando comparado com os métodos de compensação ou a solução via variáveis de estado. Isso se dá pelo fato de que tal solução é bastante simples e não envolve muitas operações numéricas, consistindo apenas na solução de um sistema de equações e atualização de variáveis (Chiesa, 2010).

Neste momento, é possível perceber que existem diferentes metodologias possíveis para simular o fenômeno de interesse. Além das citadas, outras possibilidades consistem em, por exemplo, modelar a curva de saturação através do modelo de Jiles-Atherton para histerese, considerar diferenças causadas por particularidades envolvendo aspectos construtivos do núcleo, considerar fenômenos como perdas magnéticas e uma série de outras metodologias que levam em conta outras especificidades (Chiesa, 2010).

Contudo, com base nas metodologias apresentadas e para o modelo de transformador específico a ser estudado, a proposta de nova metodologia consiste em: modelar a curva de saturação através de equações não lineares considerando o ajuste final; discretização do sistema via método numérico BDF2 e solução das equações através do método de Newton-Raphson.

### 3. METODOLOGIA

O modelo do sistema a ser tratado está exposto na Figura 5. Trata-se de um modelo comum para transformadores de potência monofásicos, composto por: fonte de tensão  $e(t)$  expressa no formato dado por  $e(t) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$ ; uma chave com tempo de fechamento  $t_f$ ; uma resistência  $R_1$  e indutância  $L_1$  referentes ao primário do transformador,

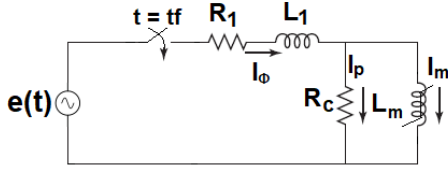


Figura 5. Modelo de transformador adotado.

resistência de núcleo  $R_c$  e indutância não linear  $L_m$  (Patel, 2013).

No caso da simulação da energização do transformador não há necessidade de se representar os parâmetros referentes ao secundário haja vista que, durante a energização, este terminal se encontra em aberto. Além disso,  $I_\phi$ ,  $I_p$  e  $I_m$  representam, respectivamente, as correntes de excitação, de perdas no núcleo e de magnetização (Patel, 2013).

### 3.1 Modelagem da curva de saturação

Para realizar a modelagem proposta, o primeiro passo consiste em detectar os parâmetros necessários para construir a curva de saturação. Tais parâmetros são aqueles mostrados na descrição da equação vista em (1) e referem-se, basicamente, à aspectos construtivos do transformador. A equação em sua forma final deve apresentar uma relação não linear entre fluxo e corrente no transformador.

Além disso, é fundamental também detectar o trecho da curva de saturação referente à inclinação final, exposta em (2). Tal equação também depende de aspectos construtivos do transformador, os quais devem ser conhecidos.

### 3.2 Discretização do sistema

Tendo em vista o fato de que o sistema de equações que descreve o modelo exposto na Figura 5 será solucionado através do método de Newton-Raphson, faz-se necessário que haja uma discretização prévia do sistema em análise. Isso se dá pelo fato de que o método de Newton-Raphson é aplicável à equações algébricas, e não à equações diferenciais.

Portanto, (Jazebi, 2015) sugere que primeiramente se detecte as equações que caracterizam o sistema e, após isso, que se discretize estas equações. Dessa maneira, partindo-se do modelo mostrado na Figura 5, é possível descrevê-lo a partir de quatro equações, sendo estas dadas por:

$$e(t) = R_1 I_\phi(t) + L_1 \frac{dI_\phi(t)}{dt} + u(t) \quad (3)$$

$$u(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (4)$$

$$u(t) = R_c [I_\phi(t) - I_m(t)] \quad (5)$$

$$I_m(t) = f(\lambda) \quad (6)$$

Nestas equações,  $\lambda$  e  $u$  referem-se ao fluxo magnético concatenado e tensão no elemento não linear, respectivamente. Os demais parâmetros são referentes ao circuito equivalente do transformador. A forma de apresentação

de (6) é uma maneira genérica de representar as equações que modelam a curva de saturação (equações (1) e (2) já apresentadas). À depender da região de operação do transformador em dado instante da solução, utiliza-se uma ou outra equação.

Nesse contexto, a discretização consiste em aplicar a formulação dada pelo método numérico BDF2 à cada uma das equações, discretizando o tempo  $t$  em  $n$  intervalos separados por um passo de tempo  $\Delta t$ . A divisão em intervalos deve obedecer a lógica de que  $t_n - t_{n-1} = \Delta t$  e  $t_n = n\Delta t$ , sendo  $t_n$  e  $t_{n-1}$  os tempos da simulação referentes ao instante atual e ao instante imediatamente anterior, respectivamente, da simulação (Jazebi, 2015). A discretização se dá por meio de:

$$y_n = \frac{2\Delta t}{3} f(t_n, y_n) + \frac{4}{3} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} \quad (7)$$

Aplicando a formulação ao conjunto de equações conhecido, é possível encontrar um novo conjunto de equações. Tratam-se de equações algébricas discretizadas, apropriadas para solução via método numérico de Newton-Raphson.

$$\frac{V_m}{w} [\text{sen}(wt_n + \Phi) - \text{sen}(wt_{n-1} + \Phi)] = M_1 + M_2 + M_3 \quad (8)$$

$$\lambda(t_n) - \lambda(t_{n-1}) = M_3 \quad (9)$$

$$u(t_n) = R_c I_\phi(t_n) - R_c I_m(t_n) \quad (10)$$

$$I_m(t_n) = f[\lambda(t_n)] \quad (11)$$

$$M_1 = R_1 \left[ \frac{2\Delta t}{3} I_\phi(t_n) + \frac{\Delta t}{6} (I_\phi(t_{n-1}) + I_\phi(t_{n-2})) \right] \quad (12)$$

$$M_2 = L_1 [I_\phi(t_n) - I_\phi(t_{n-1})] \quad (13)$$

$$M_3 = \frac{2\Delta t}{3} u(t_n) + \frac{\Delta t}{6} [u(t_{n-1}) + u(t_{n-2})] \quad (14)$$

### 3.3 Solução via Método de Newton-Raphson

A solução via Newton-Raphson deve ocorrer em um intervalo definido por um tempo inicial até um determinado tempo final, buscando-se, a cada passo de tempo, encontrar a solução para as quatro variáveis que definem as quatro equações do problema. As variáveis citadas são  $I_\phi$ ,  $I_m$ ,  $\lambda$  e  $u$ . A fim de descrever o processo de maneira generalizada, estas serão chamadas respectivamente, de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ .

Uma maneira de representar o sistema de equações a ser resolvido pode ser através da formulação expressa a seguir. Nesse sistema,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  e  $f_4$  referem-se, respectivamente, às Equações (8) à (11). Seguindo a elaboração da solução via método de Newton-Raphson, podemos expandir esse sistema de equações em séries de Taylor, desprezando as derivadas de ordem superior a 1º ordem, a fim de

identificar valores estimados para cada incógnita. Para isso é preciso estipular uma estimativa inicial atribuída à cada incógnita.

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_4) = 0 \\ f_2(x_3, x_4) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_4) = 0 \\ f_4(x_2, x_3) = 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por fim, é possível reescrever esse conjunto de equações no formato matricial exposto abaixo.

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \quad (16)$$

O vetor  $\mathbf{F}$  representa o conjunto de funções  $f_1$  à  $f_4$  com os valores da estimativa inicial substituídos, a matriz  $\mathbf{J}$  representa a matriz jacobiana, composta pelos termos referentes às derivadas parciais, e o vetor  $\Delta x$  representa os incrementos necessários à estimativa inicial a fim de se obter a solução aproximada para o problema.

À cada solução, é preciso: 1) estipular um valor inicial para  $x_1^{(0)}$ ,  $x_2^{(0)}$ ,  $x_3^{(0)}$  e  $x_4^{(0)}$ ; 2) calcular o vetor  $\mathbf{F}$  e a matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ ; 3) resolver o sistema a fim de encontrar o vetor  $\Delta x$ ; 4) somar os valores encontrando no vetor  $\Delta x$  aos valores referentes à estimativa inicial, a partir da lógica demonstrada abaixo; 5) refazer o processo iterativo até que se atenda um critério de parada; 6) atualizar os valores referentes à cada incógnita de interesse; 7) avançar o passo de tempo.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)} \\ x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + \Delta x_3^{(0)} \\ x_4^{(1)} = x_4^{(0)} + \Delta x_4^{(0)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

## 4. RESULTADOS

Os parâmetros de circuito equivalente e as grandezas referentes à aspectos construtivos do transformador utilizado para a simulação estão expostos na Tabela 1. Trata-se de parâmetros referentes a um transformador real presente no laboratório da Universidade Federal da Bahia (UFBA).

Tabela 1. Parâmetros do transformador.

	Parâmetros
$e(t)$	$179,6\cos(377t+90^\circ)$ V
$R_1$	1,9 $\Omega$
$L_1$	0,0233 H
$R_c$	19324 $\Omega$
$\mu_0$	$4*\pi*10^{-7}$ H/m
$\mu_{ir}$	18500
$B_{sat}$	0,99 T
$L$	0,511 m
$A_l$	0,004 m <sup>2</sup>
$N$	126
$\Delta t$	$1*10^{-4}$ s
$T_{max}$	0,20 s

Nesta seção serão primeiramente expostos os resultados derivados da simulação utilizando a metodologia proposta,

evidenciando suas qualidades em termos de precisão, estabilidade numérica e eficiência computacional. Em seguida, serão demonstrados alguns resultados encontrados ao utilizar outras metodologias conhecidas, à título de comparação.

### 4.1 Simulação com a metodologia proposta

A Figura 6 mostra os resultados gráficos para corrente de *inrush* e tensão no elemento não linear mediante a aplicação dos parâmetros expostos na Tabela 1, utilizando-se a metodologia proposta. As simulações foram realizadas por meio do *software* MATLAB (*Matrix Laboratory*).

Neste exemplo a corrente de *inrush* assume valores de pico negativos devido ao ângulo da tensão no instante de chaveamento (90°). Ao analisar os comportamentos dos gráficos para corrente de *inrush* e tensão no elemento não linear é possível perceber que não há presença de imprecisões numéricas significativas.

Diz-se isso pelo fato de que, graficamente, não há a presença de discontinuidades, *spikes* e quaisquer tipo de descharacterização significativa do que se sabe ser o comportamento contínuo das grandezas elétricas analisadas.

Idealmente, uma maneira adequada de confirmar a precisão seria a comparação com o resultado analítico do problema. Contudo, neste caso uma solução analítica é não trivial, haja vista a presença da não-linearidade. Contudo, é possível confirmar a afirmação ao se comparar com resultados obtidos através de outras metodologias, como será feito na seção a seguir.

Além disso, é possível destacar que além de precisa, a solução também é estável; tal constatação se dá pelo fato de que não há presença de oscilações numéricas na solução para o problema. Isso acontece justamente por conta do método numérico empregado para discretização do sistema (BDF de ordem 2) ser responsável por atenuar as chamadas componentes de decaimento rápido.

Caso o método numérico empregado para discretização deste problema fosse o método de integração trapezoidal, por exemplo, a solução certamente apresentaria oscilações numéricas, por conta de se tratar de um sistema rígido. A fim de validar a informação supracitada, a Figura 7 mostra o comportamento dos autovalores do sistema em análise.

Neste sentido, (Tokic, 2013) demonstra como se dá a detecção dos autovalores do sistema. O processo consiste em descrever o problema em termos de variáveis de estado e identificar a matriz de estados. Com base nisso, os autovalores são encontrados no tempo discreto e são variantes no tempo, haja vista que dependem de um elemento não-linear que não é constante.

Aplicando os conceitos sugeridos por (Tokic, 2013), é possível identificar que autovalores contendo parte real grande e negativa podem gerar oscilações indesejadas na solução, caso o método utilizado para solução do problema seja o método trapezoidal.

No caso em questão, são detectados dois autovalores reais e esse tipo de comportamento é visível para o autovalor 2. Isso acontece justamente quando o sistema é caracterizado como um sistema rígido.

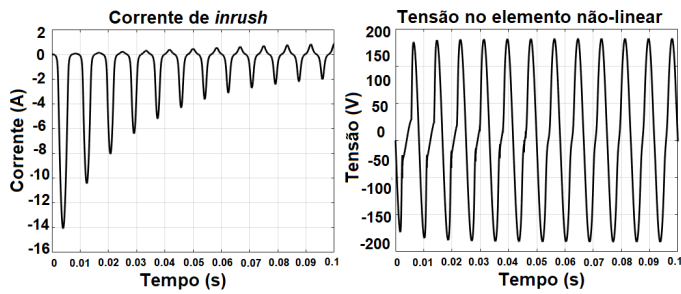


Figura 6. Resultados da metodologia proposta.

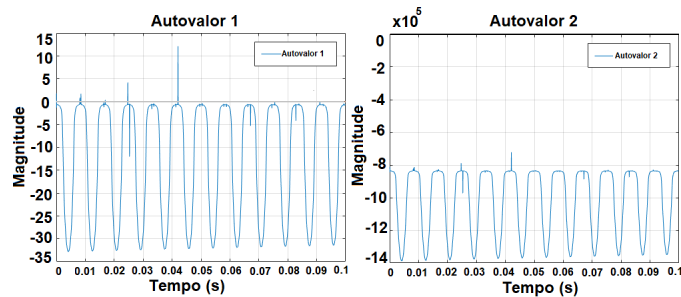


Figura 7. Comportamento dos autovalores do sistema.

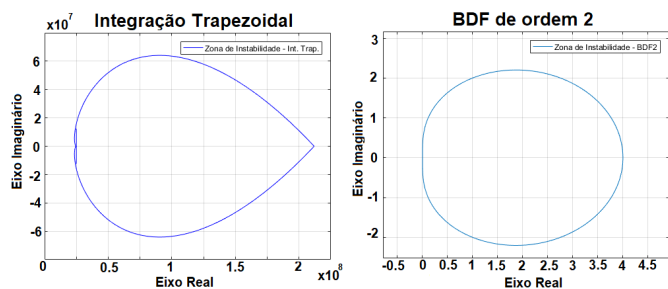


Figura 8. Zonas de instabilidade dos métodos.

Os sistemas rígidos são descritos como aqueles onde as componentes de solução evoluem em escalas muito diferentes de tempo (Tokic, 2013). O método BDF2, por sua vez, é capaz de atenuar estas oscilações por conta de suas propriedades de L-estabilidade, e por isso uma solução utilizando esse método apresenta boa estabilidade numérica (Tokic, 2013).

A Figura 8 mostra as zonas de instabilidade para cada um dos dois métodos numéricos. É possível identificar que os autovalores calculados não estão alocados dentro das zonas e portanto a solução não tenderia à instabilidade. Porém, como dito anteriormente, o sistema é caracterizado como rígido e por isso podem haver oscilações numéricas quando aplicado métodos A-estáveis para sua solução.

Ainda, a metodologia proposta também se mostrou eficiente. Tal constatação se dá pelo fato de que a simulação foi realizada em um curto intervalo de tempo (4 segundos). Para sustentar este argumento, é possível comparar o tempo dispendido para simular o mesmo fenômeno quando aplicadas outras metodologias, como será feito na seção a seguir. De modo geral, o bom desempenho em termos de eficiência se dá pelo fato de que a técnica aplicada para solução do problema não requer muitas operações numéricas e o sistema é descrito de maneira bastante simples.

#### 4.2 Comparativo com outras metodologias

Primeiramente, há de se analisar os possíveis problemas decorrentes caso a curva de saturação seja modelada através da linearização por trechos com técnica de solução baseada no método da compensação.

Neste caso, a tensão no elemento não linear se comporta conforme a Figura 9. A curva de saturação foi modelada e descrita a partir de cinco trechos linearizados.

Através da análise desta figura é possível perceber algumas discontinuidades provenientes da quantidade insuficiente de trechos linearizados. Caso a curva seja descrita utilizando-se mais trechos esse problema pode ser sanado.

Além disso, ao aplicar tal metodologia, utilizando-se os mesmos parâmetros expostos na Tabela 1, o tempo de simulação é de 40 segundos, sendo este tempo muito superior ao tempo decorrido durante a simulação utilizando-se a metodologia proposta, analisada na subseção anterior.

É fundamental destacar que o passo de tempo utilizado para ambas as simulações é o mesmo. A diferença de tempo de simulação se dá pelo tempo de processamento necessário para aplicação das metodologias.

Neste caso a eficiência é menor pois a solução para o problema envolvendo uma modelagem da curva via linearização por trechos requer uma série de procedimentos mais complexos e que envolvem mais cálculos, principalmente por conta da necessidade de detecção, à cada solução, do trecho linearizado correspondente àquele instante.

Outro tipo de problema poderia surgir caso se utilizassem metodologias baseadas na discretização do sistema via método trapezoidal. Trata-se do problema de oscilações numéricas. Caso esse método numérico fosse aplicado para discretizar o sistema descrito pelos dados da Tabela 1, a corrente de *inrush* e tensão no elemento não linear teriam comportamento conforme expostos na Figura 10.

Neste caso, comparando com os resultados obtidos na Figura 6, é perceptível que há imprecisão no cálculo dos picos da corrente de *inrush*. Além disso, a tensão no elemento não linear apresenta uma série de oscilações numéricas. Tais oscilações acontecem justamente por conta da não atenuação dos elementos de decaimento rápido.

Neste ponto é importante destacar que nem sempre o método de integração trapezoidal apresenta este tipo de problema. Essa situação depende fortemente do comportamento dos autovalores do sistema, que por sua vez podem depender dos parâmetros que definem tal sistema.

Por fim, um outro tipo de problema pode surgir caso a curva de saturação seja modelada através dos pontos de operação. Tais problemas estão relacionados à precisão. Isso acontece pelo fato de que, a todo instante da solução, há mudança no ponto de operação que define o comportamento do transformador naquele instante específico.

A Figura 11, por exemplo, apresenta o comportamento gráfico para corrente de *inrush*, utilizando-se os dados da Tabela 1, caso a curva de saturação seja modelada via pontos de operação. Neste caso pode haver uma série de discontinuidades e oscilações.

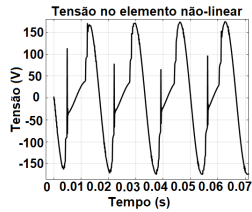


Figura 9. Imprecisões (linearização por trechos).

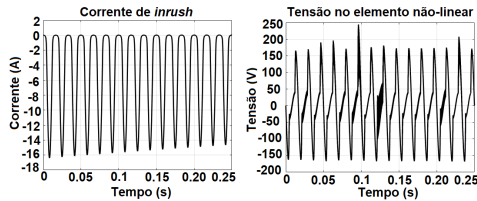


Figura 10. Instabilidade (integração trapezoidal).

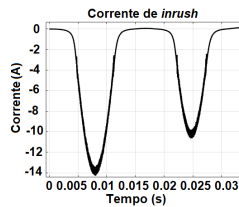


Figura 11. Imprecisões (pontos de operação).

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo principal descrever de maneira detalhada uma proposta de metodologia para simulação do fenômeno *inrush* em transformadores. A metodologia proposta se mostrou vantajosa em termos de precisão, estabilidade numérica e eficiência computacional. Isso acontece por conta da escolha dos métodos e técnicas empregadas nos processos que compõem a metodologia.

Foi possível perceber que a técnica utilizada para modelagem da curva de saturação influenciou significativamente a precisão da solução, haja vista a não presença de descontinuidades significativas nos gráficos gerados. Além disso, tal técnica também é responsável pela boa eficiência da solução, haja vista que a curva de saturação é descrita de forma simples, não sendo necessária a utilização de uma grande quantidade de informações e cálculos durante a solução via método de Newton-Raphson.

Também, a discretização do sistema através do método BDF2 se mostrou útil em termos de estabilidade na solução, haja vista que tal método é do tipo L-estável, sendo responsável por sanar instabilidades numéricas às quais o sistema analisado estaria sujeito caso se discretizasse o sistema a partir de um método A-estável, como o trapezoidal.

Sugere-se como trabalhos futuros a extensão e adaptação da metodologia proposta na aplicação voltada a sistemas elétricos de grande porte, contendo outros elementos de circuito e/ou outros transformadores. Além disso, sugere-se também estudos voltados à adaptação da metodologia à modelos de transformadores mais complexos que levem em conta a histerese e outros tipos de especificidades, assim como estudos envolvendo o transformador trifásico e suas particularidades.

## 6. REFERÊNCIAS

- Benšić, T., Biondić, I. Marić, P. (2018), “*Single-phase autotransformer modelling and model parameter identification*”. *Electr. Eng.* 100, p. 625–632.
- Chiesa, N. (2010), “*Power Transformer Modeling for Inrush Current Calculation*”, PHD Thesis (Norwegian University of Science and Technology), Norway.
- Chiesa, N. Mork, B. (2010), “*Transformer Model for Inrush Current Calculations: Simulations, Measurements and Sensitivity Analysis*”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 25, p. 2599-2608.
- Dommel, H. W. (1969), “*Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks*”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 88, pp. 388-399.
- Halim, A., Dao, T. et al (2016), “*Transformer Inrush Transients Using Jiles-Atherton Model in PSCAD*”. School of Electrical Engineering and Telecommunications, ICSG-TEIS, p.38-42, Bali, Indonésia.
- Høidalen, H.K, Chiesa, N, Avendaño, A., Mork B.A. (2011), “*Developments in the Hybrid Transformer Model Core Modeling and Optimization*”, International Conference on Power Systems Transients, Delft, Holanda.
- Jazebi, S., León, F. (2015), “*Enhanced Analytical Method for the Calculation of the Maximum Inrush Currents of Single-Phase Power Transformers*”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 30, ed. 6, p. 578-581.
- Liqun, S., Chenguan, Y, et al (2019), “*Transformer Inrush Simulation And Analysis*”, *IEEE 2nd International Conference on Electronics and Communication Engineering* p. 369-372. Xi’An, China.
- Martí, J., Lin, J. (1989), “*Suppression of numerical oscillations in the EMTP power systems*”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v.4 (nº 2), p. 739–747.
- Patel K. J. (2013), “*Effects of transformer inrush current*”, Dissertação (Engenharia Elétrica, University of Southern Queensland), Queensland, Austrália.
- Thompson, C. (1992), “*A study of numerical integration techniques for use in the companion circuit method of transient circuit analysis*”, Disponível em: “[https : //docs.lib.purdue.edu/ecetr/297/](https://docs.lib.purdue.edu/ecetr/297/)”.
- Tokić, A., Uglesić, I., Stumberger, G. (2013), “*Simulations of Transformer Inrush Current by Using BDF-Based Numerical Methods*”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2013, p. 1-10.
- Tokić, A., Kasumović, M., Pejić, M. (2021), “*Determination of single-phase transformer saturation characteristic by using Nelder–Mead optimization method*”. *Electr. Eng.* 103, p. 1321–1333.
- Zanetta, L. C. (2020), “*Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*”. 2º ed, EDUSP, São Paulo.
- Zocholl, S. (1996), “*Transformer modeling as applied to differential protection*”, Schweitzer Engineering Laboratories, Pullman, EUA.