

Projeto e Análise de Desempenho Via Simulações de Sistemas Tropicais Lineares Controlados

André E. de Moraes^{*,**} Carlos Andrey Maia^{***}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais - Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil (e-mail: amorais@ufmg.br).

^{**} Área de Controle e Processos Industriais, Instituto Federal de Minas Gerais, IFMG, campus Sabará - Rodovia MGC 262, Km 10, 34564-070, Sabará, MG, Brasil

^{***} Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais - Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil (e-mail: maia@cpdee.ufmg.br)

Abstract: This paper presents a brief introduction to the use of tropical algebra in the modeling of discrete event systems (DESs), highlighting how this mathematical structure has allowed a paradigm shift regarding the modeling and control of such systems. Additionally, it discusses important aspects of controller design applied to DESs and presents a robustness analysis based on simulations of a controlled system.

Resumo: Este artigo faz uma breve introdução ao uso da álgebra tropical na modelagem de sistemas a eventos discretos (SEDs), destacando como essa estrutura matemática permitiu uma mudança de paradigma no que diz respeito à modelagem e ao controle de desse tipo de sistema. Além disso, discute aspectos importantes do projeto de controladores aplicados a SEDs e apresenta uma análise de robustez com base em simulações de um sistema controlado.

Keywords: Modelling; Control; Petri Nets; Tropical algebra; Discrete Event Systems.

Palavras-chaves: Modelagem; Controle; Redes de Petri; Álgebra Tropical; Sistemas a Eventos Discretos.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas a Eventos Discretos (SEDs) é um conceito relativamente novo e que tem ganhado importância na engenharia. Muito em razão de permitir a modelagem, controle e automação de sistemas virtualmente impossíveis de serem tratados pela teoria clássica (Cassandras and Lafortune, 2008). É possível dizer que a teoria de SEDs teve início no final dos anos 50, com as máquinas de estados finitos apresentadas por Mealy e Moore. Nas décadas de 60 e 70 viu-se um desenvolvimento acelerado da teoria, sobretudo daquela relacionada aos autômatos e suas aplicações no projeto de controladores lógicos (Silva, 2018). Mas foi nas décadas de 80 e 90 que emergiu uma teoria de sistemas na qual modelos algébricos desempenham um papel fundamental na análise de desempenho de sistemas (Simon, 1988; Baccelli et al., 1992).

Nesse contexto de modelos algébricos, sistemas não-lineares quando olhados pelo paradigma da teoria clássica passam a ser modelados por sistemas de equações lineares quando representados dentro da estrutura matemática da álgebra tropical, permitindo a síntese de controladores (Katz, 2007; Maia et al., 2011; Gonçalves, 2014)

* Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) por meio do Programa de Excelência Acadêmica (PROEX).

Essa modelagem de SEDs no domínio da álgebra tropical, embora formalmente equivalente a outras, permite mudar o enfoque da análise e os objetivos do controle, os quais passam a basear-se em figuras de desempenho dinâmico, como estabilidade, robustez, etc. Citando Cassandras and Lafortune (2008), trata-se de uma abordagem com viés mais “prescritivo”, em contraste à natureza mais “descritiva” de outras abordagens como teoria de filas.

Neste artigo, apresentamos elementos de análise, projeto, e controle de sistemas tropicais lineares. Além disso, simulamos um modelo de um centro de distribuição de combustível para realizar o projeto de um controlador e analisar seu desempenho frente a variações paramétricas.

Quanto à organização do artigo, após esta breve introdução, a seção 2 apresenta as definições básicas importantes. A seção 3 discute o projeto do sistema de controle. A seção 4 mostra o sistema exemplo e resultados de simulações. A seção 5 traz as conclusões.

2. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Diversas abordagens já foram desenvolvidas para o tratamento de SEDs (autômatos, grafos, redes de Petri, cadeias de Markov, etc). O tipo de sistema de interesse para este trabalho pode ser convenientemente modelado como uma rede de Petri temporizada e esta será a ferramenta utili-

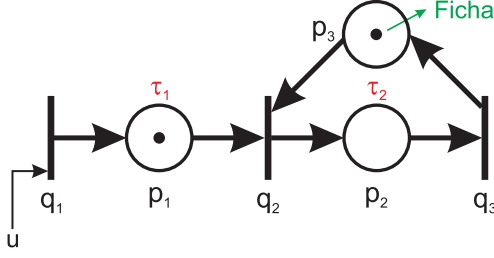


Figura 1. Rede de Petri genérica. Essa rede também constitui um GET.

zada. Especificamente, o sistema será representado como um Grafo de Eventos Temporizados (GET).

2.1 Redes de Petri Temporizadas e GETs

Definição 2.1. (Rede de Petri). Uma rede de Petri é um par (\mathcal{G}, μ) em que $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ é um grafo orientado bipartido com um número finito de nós (o conjunto \mathcal{V}), o qual é particionado em dois conjuntos disjuntos \mathcal{P} e \mathcal{Q} . O conjunto \mathcal{E} consiste de pares do tipo (p_i, q_j) e (q_j, p_i) com $p_i \in \mathcal{P}$ e $q_j \in \mathcal{Q}$. A marcação inicial da rede μ é um vetor contendo $|\mathcal{P}|$ inteiros não negativos. (Baccelli et al., 1992)

A marcação inicial definida acima corresponde a um vetor com o número de fichas contido em cada lugar da rede antes da primeira transição ocorrer. Se considerarmos que a rede mostrada na figura 1 está em seu estado inicial, então $\mu = [x(p_1) \ x(p_2) \ x(p_3)]^T = [1 \ 0 \ 1]^T$. Aqui, $x(p_i)$ representa o número de fichas no lugar p_i .

A rede de Petri é temporizada se um relógio estiver associado às transições ou aos lugares. A rede da figura 1 é um exemplo de rede p-temporizada, isto é, com relógio associado aos lugares. Nesse tipo de rede, cada ficha deve passar um tempo mínimo determinado em cada lugar antes de habilitar a transição seguinte. Por exemplo, na rede considerada, cada ficha que entrar em p_1 deve permanecer lá τ_1 unidades de tempo antes de habilitar a transição q_2 . Semelhantemente, cada ficha que entrar em p_2 deve permanecer lá τ_2 unidades de tempo antes de habilitar a transição q_3 . Já a ficha em p_3 não precisa permanecer tempo nenhum antes de habilitar q_2 .

Grafos de eventos temporizados são uma subclasse das Redes de Petri em que o fenômeno de concorrência não ocorre (da Silva Dias, 2014). Em um GET, cada lugar possui apenas um arco de entrada e outro de saída. GETs se mostram extremamente úteis na modelagem de sistemas sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso de tempo, como o que é considerado neste trabalho.

2.2 Álgebra Tropical

A álgebra tropical (Simon, 1988; Pin, 2019), que recebe esse nome em homenagem ao matemático húngaro-brasileiro Imre Simon (1943-2009), é uma estrutura definida pelo conjunto $\mathbb{R}_{max} \equiv (\mathbb{R} \cup -\infty, \oplus, \otimes)$, em que \oplus e \otimes denotam as operações de *soma* e *multiplicação* tropicais, definidas¹ abaixo (Heidergott et al., 2014):

¹ Uma definição alternativa em que $x \oplus y \equiv \min(x, y)$ (motivo pelo qual recebe o nome de “álgebra Min-Plus”) é utilizada algumas vezes. “Álgebra tropical” é o termo mais geral, que abarca as duas definições

$$\begin{aligned} x \oplus y &\equiv \max(x, y) \\ x \otimes y &\equiv x + y \end{aligned} \quad (1)$$

O elemento neutro da soma tropical é definido como $\bar{0} \equiv -\infty$ enquanto o da multiplicação tropical é definido como $\bar{1} \equiv 0$. De fato, $x \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus x = x$ e $x \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes x = x$. Além disso, $x \otimes \bar{0} = \bar{0} \otimes x = \bar{0}$

Assim como acontece com a álgebra convencional, o símbolo da multiplicação costuma ser omitido na notação.

Um fato notável a respeito da álgebra tropical é que nela não há definição da operação inversa à soma tropical, isto é, não há uma “subtração tropical”. Entretanto, existe na teoria a definição de uma operação chamada de *residuação*, que em alguns casos funciona como inversa das operações definidas na equação (1).

No contexto da álgebra tropical também são definidas estruturas equivalentes aos espaços multidimensionais definidos na álgebra convencional, cujos entes elementares são matrizes e vetores. $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ representa o conjunto de matrizes de dimensão $n \times n$, com coeficientes em \mathbb{R}_{max} . De maneira análoga ao que acontece na álgebra tradicional, para esse conjunto também são definidas as operações matriciais de soma (\oplus) e multiplicação (\otimes) tropicais. A multiplicação tropical de uma matriz por um escalar também é feita de maneira análoga à álgebra convencional.

Outra ideia que a álgebra tropical herda da álgebra clássica são os conceitos de autovalor e autovetor. Para uma dada matriz $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, se $A \otimes v = \lambda \otimes v$, onde λ é um escalar e v um vetor em \mathbb{R}_{max}^n com pelo menos uma entrada diferente de $\bar{0}$, então λ é dito ser um autovalor de A e v o autovetor correspondente (Heidergott et al., 2014).

2.3 Representação matemática do modelo da figura 1

No sistema em malha aberta apresentado na figura 1, sejam $q_i(k)$ e $u(k)$ as datas (instantes) em que acontecem os k -ésimos disparos da transição q_i e da entrada u , respectivamente. Com base na figura e na discussão prévia, percebe-se que $q_1(k)$ é controlada diretamente pela entrada $u(k)$ e as duas são disparadas simultaneamente, ou seja, $x_1(k) = u_1(k)$. O k -ésimo disparo da transição q_2 só poderá ocorrer τ_1 unidades de tempo após $q_1(k)$ ou após o $(k-1)$ -ésimo disparo da transição q_3 , a depender do que ocorrer por último. Já a transição $q_3(k)$ é disparada τ_2 unidades de tempo após o disparo de $q_2(k)$. Matematicamente, levando-se em conta as definições dadas em (1), o comportamento do sistema pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} q_1(k) &= u(k) \\ q_2(k) &= \tau_1 q_1(k) \oplus q_3(k-1) \\ q_3(k) &= \tau_2 q_2(k) \end{aligned} \quad (2)$$

O conjunto de equações (2) pode agora ser reescrito matricialmente como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \tau_1 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \tau_2 & \bar{0} \end{bmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(k-1) \\ q_2(k-1) \\ q_3(k-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k-1)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}}_{B_1} u(k) \quad (3)$$

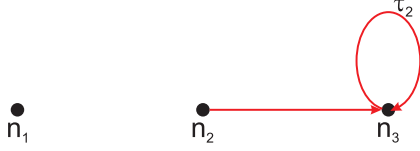


Figura 2. Grafo correspondente à matriz de precedência mostrada em (4).

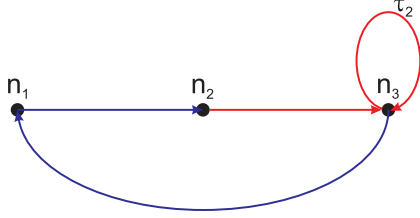


Figura 3. Grafo da figura 2 adicionado de dois arcos.

A equação matricial (3), em que $\mathbf{x}(k)$ aparece em função dele próprio, é denominada uma equação implícita. A equação canônica que representa um sistema linear em espaço de estados é da forma $\mathbf{x}(k) = A\mathbf{x}(k-1) \oplus Bu(k)$

Um resultado importante apresentado por Baccelli et al. (1992) permite converter a equação (3) para a forma canônica. Segundo este resultado, o sistema considerado aqui pode ser representado na forma canônica desde que $A = A_0^* A_1$ e $B = A_0^* B_1$, em que $*$ é o operador *estrela de Kleene*. Para uma matriz A_0 qualquer, $A_0^* \equiv I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3 \oplus \dots$. Especificamente para a matriz A_0 mostrada em (3), é direto mostrar que

$$A_0^* = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \tau_1 & \bar{1} & \bar{0} \\ \tau_1 \tau_2 & \tau_2 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

A representação canônica do sistema da figura 1 é dada então por

$$\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k-1) \\ q_2(k-1) \\ q_3(k-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \tau_1 \\ \tau_1 \tau_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (4)$$

2.4 Alguns resultados importantes da teoria de grafos

As entradas da matriz A de (4) podem ser interpretadas como pesos de arcos ligando os nós de um grafo, com cada entrada a_{ij} correspondendo ao peso do arco do nó i ao nó j . Neste caso, A é denominada *matriz de precedência* do grafo associado. A título de exemplo, a figura 2 mostra o grafo associado à matriz de precedência da equação (4). Percebe-se que esse grafo é desconexo, já que não existe conexão entre o nó n_1 e os demais. Se em um grafo qualquer existe um caminho orientado entre pares quaisquer de nós, o grafo é dito *fortemente conexo*. Por exemplo, se ao grafo da figura 2 forem adicionados dois arcos, como mostrado na figura 3, então o grafo resultante é fortemente conexo.

Uma definição importante para a discussão que se segue é a de ciclo médio.

Definição 2.2. (Ciclo médio). O peso médio de um caminho é definido como a soma dos pesos individuais dos arcos que compõem o caminho, dividido pelo comprimento do

caminho. Se o caminho for um circuito, então fala-se do peso médio do circuito, ou simplesmente do ciclo médio.

O grafo da figura 2 possui apenas um circuito, composto pelo laço que começa e termina no nó n_3 . Como o peso desse laço é τ_2 , da definição anterior segue que seu ciclo médio é dado por $\tau_2/1 = \tau_2$.

Um outro resultado importante para este trabalho é o teorema enunciado a seguir, cuja prova pode ser encontrada em Baccelli et al. (1992).

Teorema 1. Se A é irredutível ou, de maneira equivalente, se o grafo de precedência associado a A é fortemente conexo, então A possui um, e somente um autovalor (mas possivelmente vários autovetores). Este autovalor é igual ao máximo ciclo médio do grafo.

Esse resultado é importante porque o máximo ciclo médio de um grafo está relacionado à sua taxa de serviço, uma figura de desempenho de muito interesse. Assim, o teorema 1 estabelece uma relação direta entre o autovalor da matriz de precedência de um grafo fortemente conexo e o desempenho do sistema modelado pelo mesmo.

3. CONTROLE EM MALHA FECHADA DO SISTEMA MODELADO

3.1 Determinação da matriz de controle

A ideia fundamental por trás do controle de um sistema a eventos discretos é que existe um SED cujo comportamento precisa ser modificado, de modo que o sistema controlado atenda a um determinado conjunto de especificações (Cassandras and Lafortune, 2008). A premissa é a de que o comportamento do sistema em malha aberta não é satisfatório e precisa ser modificado segundo uma regra de controle a ser estabelecida. Essa modificação no comportamento do sistema é atingida, basicamente, acrescentando-se lugares de controle ao GET original de forma a restringir seu funcionamento a um subconjunto do espaço de estados. Uma consequência interessante da adição de lugares ao sistema original é que frequentemente isso torna o grafo da matriz de precedência resultante fortemente conexo e, de acordo com o teorema 1, com apenas um autovalor, o qual é igual ao máximo ciclo médio do sistema controlado.

A primeira etapa no projeto do controlador consiste em codificar matematicamente as restrições que o sistema controlado deve atender. Tipicamente, isso resulta em uma matriz E , denominada *matriz de restrições*. Utilizando as informações de E e da matriz de estado do sistema em malha aberta, uma matriz de controle F é determinada, a qual define as conexões e demais características dos lugares de controle que devem ser inseridos. Uma vez que F tenha sido determinada, então o comportamento do sistema em malha fechada passa ser descrito pelo conjunto de equações abaixo (Maia et al., 2011).

$$\begin{cases} x(k) = (A \oplus BF)x(k-1) \\ E^* x(k) = x(k) \end{cases} \quad (5)$$

3.2 Causalização da matriz de controle

Frequentemente, a matriz de controle F obtida da maneira descrita na seção 3.1 é não-causal e, conseqüentemente,

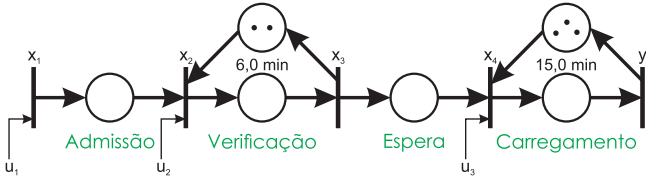


Figura 4. Modelo de uma estação de distribuição de combustível.

irrealizável na prática. Torna-se necessário então encontrar uma matriz de controle causal equivalente. O método mais intuitivo de causalização de uma matriz tropical é identificar sua entrada mais negativa e então realizar uma multiplicação tropical escalar da matriz pelo módulo da entrada. Esse método é denominado de *paralelismo*. Embora simples e intuitivo, o paralelismo apresenta uma grande desvantagem: ele gera um sistema em malha fechada com autovalor maior que o máximo ciclo médio do sistema em malha aberta. Em outras palavras, ele atrasa a dinâmica do sistema e prejudica seu desempenho. Um outro método, desenvolvido em de Moraes (2022), capaz de gerar uma matriz de controle causal equivalente que conduz a um sistema em malha fechada com desempenho ótimo, será utilizado aqui.

4. MODELAGEM, CONTROLE E SIMULAÇÃO DE UM TERMINAL DE DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL

4.1 Descrição do modelo

Para exemplificar tudo o que foi apresentado nas seções anteriores, consideraremos nesta seção a modelagem e controle do fluxo de caminhões tanque em uma estação de distribuição de combustíveis. O modelo em GET da estação é mostrado na figura 4

Quatro eventos controlam o funcionamento da estação. Primeiramente, cada caminhão que chega precisa ser admitido. A admissão de um caminhão às dependências da estação é indicada pelo disparo da transição x_1 , seguido da colocação de uma ficha no lugar correspondente. O disparo de x_1 é controlado pela entrada u_1 .

A segunda etapa do processo, verificação, tem início indicado pelo disparo da transição x_2 , o qual é controlado pela entrada u_2 . Este disparo retira uma ficha de cada lugar de entrada e acrescenta uma ficha ao lugar de saída. Nesta etapa, todos dados do cliente que chega para carregar o caminhão são conferidos e atualizados. Esse processo leva 6,0 minutos para ser concluído, como indicado na figura. Aqui é assumido que a estação dispõe de dois terminais para o processo de verificação

O disparo da transição x_3 , que é seguido da retirada de uma ficha do seu lugar de entrada e colocação de uma ficha em cada um de seus dois lugares de saída, marca o fim da segunda etapa, quando o caminhão deixa o terminal de verificação se dirige a um pátio de espera, onde aguarda até ser admitido a um dos terminais de abastecimento disponíveis. É válido salientar que, tal como mostrado na figura, o modelo por si só não impõe nenhum limite ao número de caminhões que podem ser admitidos ao pátio de espera, embora obviamente exista esse limite. Isso

acontece porque há o interesse em se estabelecer um limite mais estrito para esse número, visando à segurança dos usuários da estação. Aqui, será considerado um limite de 6 caminhões no pátio, o que corresponde ao dobro do número de terminais disponíveis para o carregamento.

Uma outra restrição que deseja-se impor ao sistema diz respeito ao tempo de espera de cada caminhão. Será considerado aqui que deseja-se limitar este tempo a um máximo de 16 minutos para qualquer cliente. Além disso, deseja-se que a estação atenda ao máximo de caminhões possível, isto é, que o sistema opere desempenhando sua taxa máxima de serviço. Será tarefa do sistema de controle garantir que as restrições sejam atendidas ao mesmo tempo em que uma taxa de serviço ótima é desenvolvida.

Terminada a espera, acontece o disparo da transição x_4 , que marca a admissão do caminhão a um dos três terminais de abastecimento disponíveis. O processo de abastecimento acontece em 15 minutos, após o que a transição y é disparada, indicando o fim do abastecimento e saída do caminhão das dependências da estação.

Seguindo os passos delineados na seção 2.3, é possível construir a representação canônica em espaço de estados do sistema. O resultado para o sistema considerado aqui é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 A_{xx} &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} & A_{xw} &= \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{6} \\ \bar{6} \end{bmatrix} \\
 A_{xz} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & 15 & \dots & \bar{0} \end{bmatrix}_{4 \times 6} & A_{wx} &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}] \\
 A_{zz} &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{1} \end{bmatrix}_{6 \times 6} & A_{zx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}_{6 \times 4} \\
 A_{zw} &= [\bar{1}] & A_{wz} &= [\bar{0}]_{1 \times 6} \\
 A_{zw} &= [\bar{0}]_{6 \times 1} & B_x &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{6} & \bar{1} \end{bmatrix} \\
 B_w &= [\bar{0}]_{1 \times 3} & B_z &= [\bar{0}]_{6 \times 3} \\
 C_x &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0} \ 15] & C_w &= [\bar{0}] \\
 C_z &= [\bar{0}]_{1 \times 6}
 \end{aligned}$$

4.2 Generalidade e aplicabilidade do modelo

O modelo apresentado na seção 4.1 é mais geral do que a sua descrição sugere. Muitos sistemas/processos físicos podem ser modelados em 04 etapas, com uma etapa intermediária envolvendo espera, e com a necessidade de se limitar o número de usuários no local de espera e/ou talvez em algum outro lugar.

Um exemplo é um sistema de produção de uma fábrica cujas etapas poderiam ser modeladas como (1) recebimento das matérias-primas; (2) processamento e montagem das peças ou produtos; (3) espera pelo controle de qualidade; (4) embalagem e expedição. Por questões de segurança e

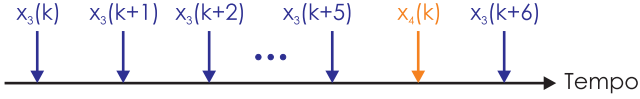


Figura 5. Sequência crítica de disparos de $x_3(k)$ e $x_4(k)$.

qualidade, pode ser necessário limitar o número peças ou produtos na terceira etapa.

Um hospital de emergência é outro exemplo, cujas etapas modeladas poderiam ser (1) chegada do paciente; (2) triagem do paciente e avaliação médica inicial; (3) espera pelo atendimento médico; (4) atendimento médico e internação, se necessário. Por uma questão de segurança sanitária, é desejável limitar o número de pacientes na sala de espera. Nesse caso, o GET mostrado na figura 4 representaria um hospital com dois terminais de triagem e três médicos.

Hospitais de emergência costumam receber alta demanda. O modelo desenvolvido aqui poderia ser utilizado para simular a resposta do sistema sob diferentes cenários de demanda. Além disso, ele poderia ser integrado a um sistema mais complexo, que envolva o roteamento de usuários para diferentes hospitais por meio de aplicativos com base em cenários simulados, talvez fazendo uso de IA.

Em todo caso, o modelo fornece informações de suporte para decisões dos administradores dos sistemas modelados, com vistas à otimização de seus funcionamentos.

4.3 Determinação das matrizes de restrições e de controle

Voltando ao exemplo específico considerado neste artigo, a matriz de restrições pode ser encontrada considerando a sequência crítica de disparos mostrada na figura 5. O número de caminhões no pátio de espera depende dos disparos de x_3 e x_4 . Para garantir que não se tenha mais do que 6 caminhões no pátio, a seguinte condição deve ser observada:

$$\begin{aligned} x_4(k) &\leq x_3(k+6) \\ x_4(k-6) &\leq x_3(k) \Rightarrow z_6(k) \leq x_3(k) \end{aligned} \quad (6)$$

A restrição relacionada ao tempo máximo de espera no pátio pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_4(k) &\leq 16x_3(k) \\ x_4(k) &\leq 22x_2(k) \\ -22x_4(k) &\leq x_2(k) \end{aligned} \quad (7)$$

Com base nestas informações, a matriz de restrições adquire a seguinte forma:

$$E = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xw} & E_{xz} \\ E_{wx} & E_{ww} & E_{wz} \\ E_{zx} & E_{zw} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (8)$$

para a qual

$$E_{xx} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & -22 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad E_{xz} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}_{4 \times 6}$$

As demais sub-matrizes representadas em (8) são matrizes tropicais com dimensões apropriadas cujas entradas são todas iguais a $\bar{0}$.

Tendo encontrado a matriz de restrições, os métodos apresentados em Maia et al. (2011) e de Moraes (2022)

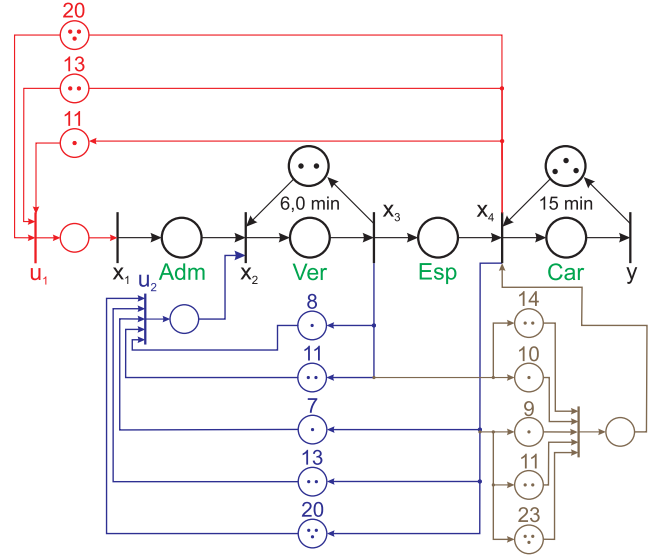


Figura 6. Modelo da figura 4 acrescido dos lugares de controle.

Tabela 1. Datas dos primeiros disparos das transições do sistema em malha aberta

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_1(k)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2(k)$ | 0 | 0 | 6 | 6 | 12 | 12 | 18 |
| $x_3(k)$ | 6 | 6 | 12 | 12 | 18 | 18 | 24 |
| $x_4(k)$ | 6 | 6 | 12 | 21 | 21 | 27 | 36 |
| $y(k)$ | 21 | 21 | 27 | 36 | 36 | 42 | 51 |

são utilizados para determinar a matriz de controle causal mostrada a seguir:

$$F = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 11 & \bar{0} & 13 & 20 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 8 & 7 & 11 & 13 & 20 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 10 & 9 & 14 & 11 & 23 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A figura 6 mostra o sistema com os lugares de controle indicados pela matriz (9).

4.4 Simulação do modelo em malha aberta

A tabela 1 mostra as datas dos sete primeiros disparos das transições da rede mostrada na figura 4, operando sem controlador. Como apenas restrições físicas são atendidas pelo modelo, não existe nenhuma limitação à admissão de caminhões às dependências da estação. Consequentemente, um número infinito de admissões ocorre em $t = 0$. Obviamente, isto não é fisicamente possível e evidencia um ponto de desvio do modelo em relação a uma estação real. Entretanto, esse resultado fornece um *insight* valioso acerca da sua dinâmica. O comportamento do sistema modelado sob essas circunstâncias corresponde à sua resposta ao impulso e revela modos característicos de seu funcionamento. Em particular, observando as datas de disparo da transição $y(k)$, é possível verificar que três caminhões deixam o terminal de carregamento a cada 15 minutos, o que corresponde a um tempo médio de 5 minutos por caminhão carregado. Isto é coerente com as especificações do modelo e expressam a taxa máxima de serviço que esse sistema pode desenvolver.

As figuras 7 e 8 mostram a evolução do número de caminhões no pátio de espera e do tempo de espera de cada caminhão até ser admitido a um terminal de

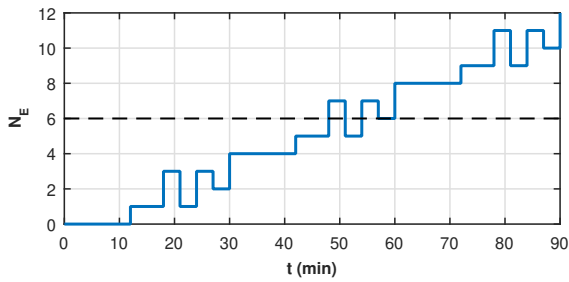


Figura 7. Número de caminhões no pátio de espera x tempo para o sistema em malha aberta.

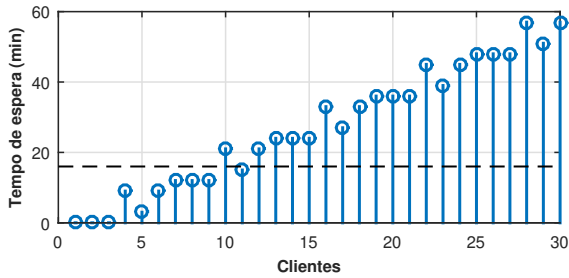


Figura 8. Tempo de espera de cada caminhão para o sistema em malha aberta.

carregamento. As linhas horizontais pontilhadas mostram os respectivos limites impostos aos parâmetros. Percebe-se que ambas as restrições são violadas. Na verdade, o sistema se mostra instável e os dois parâmetros considerados tendem a infinito.

4.5 Simulação do modelo em malha fechada

A tabela 2 mostra as datas dos primeiros disparos das transições do sistema quando a malha de controle é fechada, como mostrado na figura 6. Nos dez primeiros disparos a malha encontra-se aberta e o sistema funciona tal como visto na seção 4.4. A malha é fechada entre o 10^o e o 11^o disparo. As datas de $y(k)$ mostram que após o fechamento da malha o sistema de controle consegue manter a mesma taxa de serviço que o sistema em malha aberta, isto é, um caminhão deixa o terminal a cada 5 minutos, em média. Como comentado anteriormente, outras estratégias de causalização da matriz de controle podem não garantir essa mesma taxa de serviço.

As figuras 9 e 10 mostram o número de caminhões no pátio de espera e o tempo de espera de cada um com o sistema em malha fechada. Para destacar a ação do sistema de controle, foi incluído na simulação um período inicial maior em que o sistema funciona em malha aberta. Vê-se claramente que, uma vez fechada a malha, o controlador atua para garantir o atendimento às restrições não físicas impostas ao sistema.

4.6 Resposta do sistema a variações paramétricas

Uma questão interessante acerca do sistema de controle é como ele reage a variações paramétricas do modelo. Embora este trabalho não tenha a intenção de tratar essa questão analiticamente, algumas simulações ajudam a dar respostas parciais.

Tabela 2. Datas dos primeiros disparos antes e após a malha de controle ser fechada.

| k | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ | $x_4(k)$ | $y(k)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|--------|
| 1 | 0 | 0 | 6 | 6 | 21 |
| 2 | 0 | 0 | 6 | 6 | 21 |
| 3 | 0 | 6 | 12 | 12 | 27 |
| 4 | 0 | 6 | 12 | 21 | 36 |
| 5 | 0 | 12 | 18 | 21 | 36 |
| 6 | 0 | 12 | 18 | 27 | 42 |
| 7 | 0 | 18 | 24 | 36 | 51 |
| 8 | 0 | 18 | 24 | 36 | 51 |
| 9 | 0 | 24 | 30 | 42 | 57 |
| 10 | 0 | 24 | 30 | 51 | 66 |
| 11 | 47 | 47 | 53 | 53 | 68 |
| 12 | 49 | 49 | 55 | 57 | 72 |
| 13 | 56 | 56 | 62 | 66 | 81 |
| 14 | 62 | 62 | 68 | 68 | 83 |
| 15 | 64 | 64 | 70 | 72 | 87 |
| 16 | 71 | 71 | 77 | 81 | 96 |
| 17 | 77 | 77 | 83 | 83 | 98 |
| 18 | 79 | 79 | 85 | 87 | 102 |

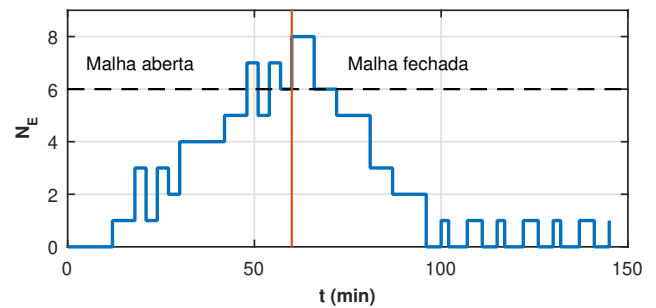


Figura 9. Número de caminhões no pátio de espera x tempo à medida em que o sistema vai de malha aberta a malha fechada.

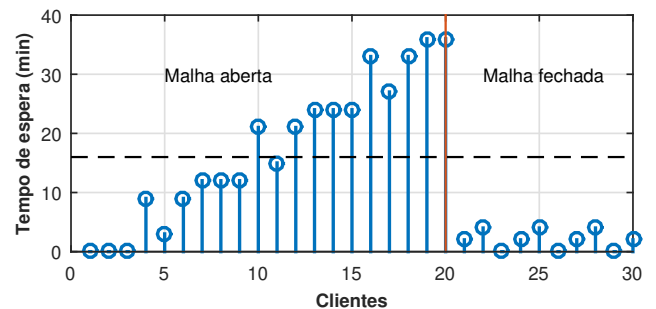


Figura 10. Tempo de espera dos caminhões à medida em que o sistema vai de malha aberta a malha fechada.

A tabela 3 mostra as datas dos disparos das transições supondo que um dos terminais de carregamento seja desativado durante a operação. Os valores da tabela consideram que durante o regime de malha aberta os três terminais estão operantes e que no momento em que a malha é fechada um deles é desativado. Observando-se os valores de $y(k)$, percebe-se que a taxa de serviço cai quando um dos terminais é desativado. Se com os três terminais operantes, um caminhão deixava o centro a cada 5 minutos, com apenas dois, um caminhão deixa o centro a cada 7,5 minutos. Isto é coerente com o fato de que a etapa de carregamento é o gargalo desse sistema.

Tabela 3. Datas dos primeiros disparos com o mesmo sistema de controle, mas com apenas dois terminais de abastecimento operantes.

| k | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ | $x_4(k)$ | $y(k)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|--------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 8 | 0 | 18 | 24 | 36 | 51 |
| 9 | 0 | 24 | 30 | 42 | 57 |
| 10 | 0 | 24 | 30 | 51 | 66 |
| 11 | 47 | 47 | 53 | 57 | 72 |
| 12 | 49 | 49 | 55 | 66 | 81 |
| 13 | 56 | 56 | 62 | 72 | 87 |
| 14 | 62 | 62 | 68 | 81 | 96 |
| 15 | 68 | 68 | 74 | 87 | 102 |

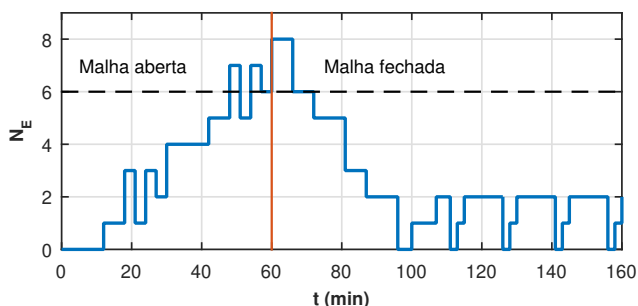


Figura 11. Número de caminhões no pátio de espera x tempo do sistema em malha fechada mediante diminuição no número de terminais de carregamento de caminhões.

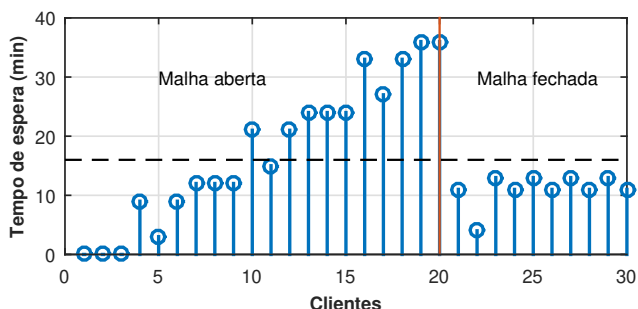


Figura 12. Tempo de espera dos caminhões do sistema em malha fechada mediante diminuição no número de terminais de carregamento de caminhões.

As figuras 11 e 12 mostram que as restrições não físicas continuam sendo atendidas, mas com uma margem menor em relação aos limites estabelecidos. Isto indica que a sensibilidade do sistema ao parâmetro analisado não é tão grande que o torne imediatamente instável. É válido salientar que a mudança considerada corresponde a uma variação de -33,3% do valor inicial do parâmetro correspondente.

Para investigar um pouco melhor esta questão, uma nova simulação foi realizada, supondo agora que dois dos três terminais de carregamento são desativados. Os resultados seguem na tabela 4 e na figura 13.

A observação mais importante aqui é que o controlador estabiliza o tempo de espera dos caminhões, mas em um valor acima do limite estabelecido, ou seja, o sistema controlado viola uma restrição. A taxa de serviço é de um caminhão atendido a cada 15 minutos, o que está de

Tabela 4. Datas de alguns disparos iniciais do sistema controlado com apenas um terminal de abastecimento ativo.

| k | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ | $x_4(k)$ | $y(k)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|--------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 8 | 0 | 18 | 24 | 36 | 51 |
| 9 | 0 | 24 | 30 | 42 | 57 |
| 10 | 0 | 24 | 30 | 51 | 66 |
| 11 | 47 | 47 | 53 | 66 | 81 |
| 12 | 49 | 49 | 55 | 81 | 96 |
| 13 | 56 | 56 | 62 | 96 | 111 |
| 14 | 62 | 62 | 68 | 111 | 126 |
| 15 | 77 | 77 | 83 | 126 | 141 |

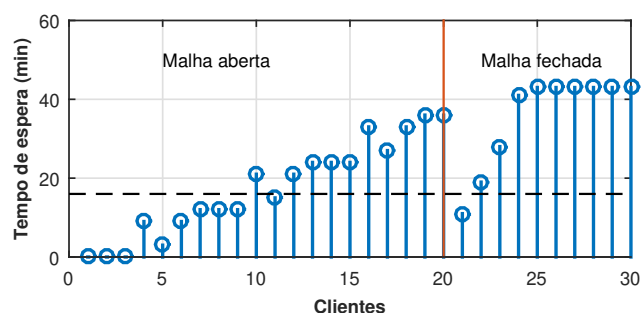


Figura 13. Tempo de espera dos caminhões do sistema em malha fechada com apenas um terminal de carregamento ativo.

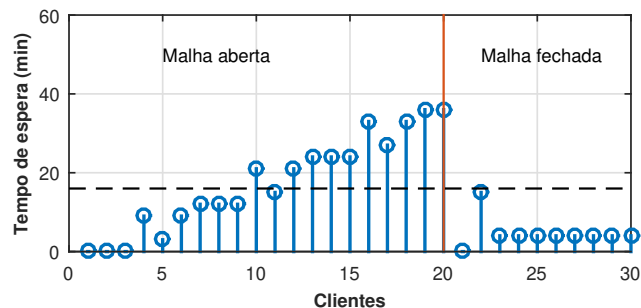


Figura 14. Resposta do mesmo sistema da figura 13 após o sistema de controle ser reprojetoado.

acordo com o esperado. A figura 14 mostra a resposta do mesmo sistema após a matriz de controle ser reprojetoada levando-se em consideração a nova configuração. Nesse caso o sistema de controle opera de maneira satisfatória.

Um outro ponto interessante de ser verificado é o comportamento do sistema controlado quando um dos terminais de verificação é desativado. A tabela 5 mostra os resultados.

Os dados mostram que a taxa de disparo de $y(k)$ passa por um leve transitório quando a malha é fechada até se estabilizar em um valor que corresponde a um disparo a cada 6 minutos. Este é o valor esperado, já que com apenas um terminal de verificação, esta etapa passa a ser o gargalo de todo o processo. A tabela mostra ainda que, com o sistema controlado, as transições x_3 e x_4 são sempre disparadas ao mesmo tempo. Conseqüentemente, nenhum caminhão fica no pátio e o tempo de espera é igual a zero, isto é, nenhuma restrição é violada.

Tabela 5. Datas de alguns disparos iniciais do sistema controlado e com apenas um terminal de verificação.

| k | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ | $x_4(k)$ | $y(k)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|--------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 8 | 0 | 18 | 24 | 36 | 51 |
| 9 | 0 | 24 | 30 | 42 | 57 |
| 10 | 0 | 24 | 30 | 51 | 66 |
| 11 | 47 | 47 | 53 | 53 | 68 |
| 12 | 49 | 53 | 59 | 59 | 74 |
| 13 | 56 | 59 | 65 | 66 | 81 |
| 14 | 62 | 65 | 71 | 71 | 86 |
| 15 | 64 | 71 | 77 | 77 | 92 |

Tabela 6. Datas de alguns disparos iniciais do sistema controlado e tempo de carregamento igual a 20 minutos.

| k | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_3(k)$ | $x_4(k)$ | $y(k)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|--------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 8 | 0 | 18 | 24 | 46 | 66 |
| 9 | 0 | 24 | 30 | 52 | 72 |
| 10 | 0 | 24 | 30 | 66 | 86 |
| 11 | 57 | 57 | 63 | 66 | 86 |
| 12 | 59 | 59 | 65 | 72 | 92 |
| 13 | 66 | 66 | 72 | 86 | 106 |
| 14 | 77 | 77 | 83 | 86 | 106 |
| 15 | 79 | 79 | 85 | 92 | 112 |

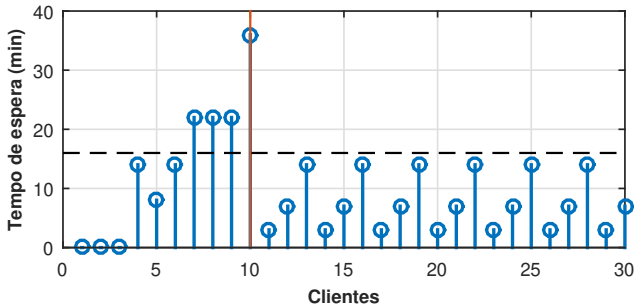


Figura 15. Resposta do sistema quando o tempo de carregamento é aumentado para 20 minutos mantendo o controlador original.

É válido observar que existe uma equivalência entre variações nos tempos associados às etapas do processo e mudanças nos outros parâmetros. Por exemplo, um aumento do tempo de carregamento é equivalente a uma diminuição do número de terminais de carregamento. Resultados simulados mostram que a sensibilidade do controlador a variações nos tempos também é equivalente aquela observada para variações no número de terminais. A tabela 6 e a figura 15 mostram os resultados das simulações quando o controlador é mantido inalterado, mas o tempo de carregamento dos caminhões sobe para 20 minutos (+33%). Os disparos de $y(k)$ indicam que três caminhões são atendidos a cada 20 minutos. A figura 15 mostra que o controlador consegue forçar o atendimento da restrição relacionada ao máximo tempo de espera, mas por uma margem pequena. Outras simulações mostram que se o tempo de carregamento crescer além de 21 minutos, o tempo de espera passa a ser maior que o estabelecido.

As conclusões desta seção são qualitativas e parciais. Um estudo analítico abrangente das condições de robustez dos sistemas tropicais lineares controlados está em curso e esperamos divulgar nossos resultados oportunamente.

5. CONCLUSÕES

Um dos objetivos deste trabalho foi mostrar como a álgebra tropical, quando aplicada à modelagem e controle de uma certa classe de SEDs, permite o desenvolvimento de técnicas análogas às utilizadas na teoria clássica de sistemas dinâmicos. Isso foi mostrado ao longo das seções 2 e 3. Um outro objetivo era apresentar resultados preliminares de um estudo sobre robustez de sistemas tropicais lineares com base em simulações, o que foi feito na seção 4. Em geral, os resultados indicam que o sistema de controle proposto consegue compensar variações paramétricas da ordem de 33% do valor para o qual foi projetado. Esses resultados preliminares servem de guia para estudos analíticos mais rigorosos que pretendemos fazer na sequência.

REFERÊNCIAS

- Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., and Quadrat, J.P. (1992). Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems.
- Cassandras, C.G. and Lafortune, S. (2008). *Introduction to discrete event systems*. Springer.
- da Silva Dias, J.R. (2014). Métodos de controle de fluxo de entrada para sistemas modelados por grafos de eventos temporizados.
- de Moraes, A.E. (2022). Controle realimentado de admissões nas diferentes etapas de um ciclo de vacinação via álgebra tropical.
- Gonçalves, V.M. (2014). *Tropical Algorithms for Linear Algebra and Linear Event-Invariant Dynamical Systems*. Tese de doutorado, PPGEE-UFMG.
- Heidergott, B., Olsder, G.J., and Van Der Woude, J. (2014). Max plus at work. In *Max Plus at Work*. Princeton University Press.
- Katz, R.D. (2007). Max-plus (a, b) -invariant spaces and control of timed discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2), 229–241.
- Maia, C.A., Andrade, C., and Hardouin, L. (2011). On the control of max-plus linear system subject to state restriction. *Automatica*, 47(5), 988–992.
- Pin, J.É. (2019). The influence of imre simon’s work in the theory of automata, languages and semigroups. In *Semigroup Forum*, volume 98, 1–8. Springer.
- Silva, M. (2018). On the history of discrete event systems. *Annual Reviews in Control*, 45, 213–222. doi:<https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.03.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578818300300>.
- Simon, I. (1988). Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring. In *In: Chytil M.P., Koubek V., Janiga L. (eds) Mathematical Foundations of Computer Science 1988. MFCS 1988. Lecture Notes in Computer Science.*, volume 324. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0017135>.