

# Tutorial: Implementando Controladores Preditivos Não Lineares através do Ferramental LPV <sup>\*</sup>

Marcelo M. Morato <sup>\*,\*\*</sup> Amir Naspolini <sup>\*</sup> Julio E. Normey-Rico <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Dept. de Automação e Sistemas (DAS), Univ. Fed. de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brazil.

<sup>\*\*</sup> Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP (Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes), GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France. (marcelomnm@gmail.com)

---

**Abstract:** Recent works have demonstrated how Linear Parameter Varying Model Predictive Control (LPV MPC) algorithms are able to control nonlinear systems with precision and reduced computational load. Specifically, these schemes achieve comparable performances to state-of-the-art nonlinear MPCs, while requiring the solution of only one quadratic programming problem (thus being real-time capable). In this tutorial paper, we provide a step-by-step overview of how to implement such LPV MPC algorithms, covering from modelling to prediction aspects. For illustration purposes, we consider a realistic implementation for a gas-lift petroleum extraction process, comparing the LPV approach with the benchmark nonlinear MPC software CasADi.

**Resumo:** Diversos estudos recentes demonstram como Controladores Preditivos baseados em Modelo Lineares a Parâmetros Variantes (MPC LPV) têm a capacidade de regular sistemas não lineares com precisão e esforço numérico reduzido. Tais controladores podem alcançar desempenhos comparáveis com abordagens do tipo MPC não linear, ao passo que requerem apenas a solução de um problema de programação quadrática por amostra (possibilitando aplicações embarcadas, em tempo-real). Neste artigo-tutorial, detalhamos todas as etapas necessárias para o projeto de algoritmos MPC LPV; abordamos temas referentes à modelagem (como obter representações LPV) e às hipóteses necessárias de projeto, além de debatermos sobre predição dos sinais de agendamento LPV. Para fins de ilustração, apresentamos uma implementação numérica para um sistema de extração de petróleo por elevação artificial com injeção de gás (*gas-lift*), comparando a abordagem LPV com o software CasADi.

*Keywords:* Model predictive control; LPV systems; Gas-lift.

*Palavras-chaves:* Controle preditivo; Sistemas LPV; Gas-lift.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O controle preditivo baseado em modelo (MPC) é amplamente difundido para a regulação ótima de sistemas sujeitos a restrições. A ideia central concentra-se na obtenção da lei de controle através da solução, a cada amostra, de um problema de otimização levando em conta as restrições do processo e *predições* do comportamento futuro das variáveis de interesse ao longo de um *horizonte deslizante de predição*. Ao longo das últimas duas décadas, desenvolveu-se um arcabouço teórico extenso para esta metodologia de controle, incluindo *certificados* de performance e estabilidade (em malha fechada), tanto para processos lineares quanto não lineares, c.f. (Limon et al., 2018; Morato et al., 2023). Entretanto, o grande desafio teórico enfrentado pela comunidade científica é: como possibilitar a aplicação de

algoritmos MPC *não lineares* (NMPC) em *tempo-real*, na escala dos microssegundos. O impedimento para tal se dá pelo fato de que, quando usamos modelo não linear, o programa de otimização do MPC resultante torna-se, também, não linear, requerendo um esforço numérico elevado para resolução. Enfatizamos que algoritmos NMPC apresentam um crescimento exponencial do tempo médio de cômputo face à dimensão do sistema e ao tamanho do horizonte predito.

A solução mais difundida para este problema é a aproximação do programa de otimização não linear por uma sequência de programas de programação quadráticos (QPs), assim reduzindo a carga numérica. Apesar da profusão recente de ferramentas como ACADO e CasADi Andersson et al. (2019), debatemos, aqui, um caminho alternativo: o projeto através de modelos Lineares a Parâmetros Variantes (LPV), cujos principais trabalhos são listados na revisão sistemática (Morato et al., 2020). A grande vantagem do uso de modelos LPV <sup>1</sup> consiste no fato da otimização resultante ser do tipo QP. Desta forma, mantém-se uma

---

<sup>\*</sup> Agradecemos: CAPES, CNPq (304032/2019 – 0, 403949/2021 – 1) e o apoio financeiro do Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis - PRH-ANP, suportado com recursos provenientes do investimento de empresas petrolíferas qualificadas na Cláusula de P, D&I da Resolução ANP n<sup>o</sup> 50/2015. Uma versão longa, estendida deste trabalho está disponível em <https://arxiv.org/abs/2304.14981>.

<sup>1</sup> Em suma, modelos LPV são capazes de representar trajetórias não lineares, variantes no tempo, através do uso de parâmetros de agendamento (variantes no tempo) limitados e mensuráveis online.

carga numérica reduzida, e uma predição (quase) **exata** das dinâmicas futuras do sistema controlado, uma vez que nenhuma etapa de aproximação é necessária. Recentemente, diversos algoritmos MPC LPV foram desenvolvidos, c.f. (Cisneros and Werner, 2017; Morato et al., 2021); em comparação com os algoritmos NMPC rápidos, diferentes resultados apontam para **competitividade numérica e desempenho similar**, e.g. (Morato et al., 2022c).

Com base neste contexto, a contribuição deste artigo é de servir como um **tutorial** detalhado, passo-a-passo, para o projeto de algoritmos MPC rápidos para sistemas não lineares, com base em modelos LPV. Na sequência, abordamos os seguintes tópicos: obtenção de modelos LPV para sistemas não lineares (Seção 2); predição dos parâmetros de agendamento, com base em expansões de Taylor (Seção 3); aspectos de implementação (Seção 4); ensaios em simulação (Seção 5); conclusões (Seção 6).

**Notação.** O conjunto de índices  $\mathbb{N}_{[a,b]}$  é dado por  $\{i \in \mathbb{N} | a \leq i \leq b\}$ , com  $0 \leq a \leq b$ . A matriz identidade de tamanho  $j$  é representada por  $I_j$ , ao passo que  $I_{\{i\},j}$  representa a  $i$ -ésima linha da respectiva matriz de identidade.  $\text{col}(v)$  representa a vetorização em coluna das entradas  $v$ ;  $u(k+i|k)$  representa a predição da variável  $u$  para o instante de tempo  $k+i$ , realizada no instante  $k$ . Funções classe  $\mathcal{K}$  são escalares, positivas e estritamente crescentes.

#### Estudo de caso: Extração de Petróleo por gas-lift

Para ilustrarmos e debatermos as técnicas descritas ao longo deste tutorial, consideramos um estudo de caso concreto: o processo de extração de petróleo do fundo de um poço por elevação artificial, através da injeção de gás, método chamado de *gas-lift*.

Em geral, para que se possa extrair petróleo de um reservatório e conduzi-lo até a superfície, é necessário usar alguma estratégia de elevação artificial no poço produtor. A técnica do *gas-lift* consiste na injeção de um gás pressurizado oriundo da plataforma até o fundo do mar através de uma tubulação exterior ao poço (tubo anular). Esta injeção é feita através de válvulas ao longo do tubo de produção, de forma a diminuir a densidade do fluido que está sendo extraído e permitir que a pressão do reservatório seja suficiente para elevá-lo até a superfície. O gás usado para este processo é, em geral, extraído do próprio reservatório.

O processo de *gas-lift* é descrito matematicamente pelo modelo apresentado a seguir, considerando pressão uniforme ao longo do anular e que a mistura gás-líquido é descrita unicamente em função do óleo e do gás:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = w_{g,in}(t) - w_{g,inj}(t), \\ \dot{x}_2(t) = w_{g,inj}(t) + w_{g,res}(t) - w_{g,out}(t), \\ \dot{x}_3(t) = w_{o,res}(t) - w_{o,out}(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $x_1$  é a quantidade de gás no anular,  $x_2$  e  $x_3$  a quantidade de gás e óleo no tubo, respectivamente. As vazões mássicas referentes ao gás  $w_{g,in}$ ,  $w_{g,inj}$ ,  $w_{g,res}$  e  $w_{g,out}$  são, respectivamente, a vazão de entrada no anular, a vazão entre o anular e o tubo, a vazão entre o reservatório e o tubo e a vazão de saída do tubo. As vazões mássicas referentes ao óleo  $w_{o,res}$  e  $w_{o,out}$  são, respectivamente, as vazões de saída do reservatório e do tubo. A vazão mássica total proveniente do reservatório,  $w_{res}$ , é composta

pela vazão de óleo  $w_{o,res}$  e de gás  $w_{g,res}$ . Especificamente, temos:

$$\begin{aligned} w_{g,in}(t) &= K_{cgl} \sqrt{\max(0, \mu_a(t)(P_{fg} - P_a(t)))} u_1(t), \\ w_{g,inj}(t) &= K_{inj} \sqrt{\max(0, \mu_a(t)(P_a(t) - P_t(t)))}, \\ w_{o,res}(t) &= i_P \max(0, (P_r - P_{fp}(t))), \\ w_{g,res}(t) &= g_{go} w_{o,res}(t), \\ w_{mgo}(t) &= K_{cp} \sqrt{\max(0, \mu_t(t)(P_{tt}(t) - P_s))} u_2(t), \\ w_{g,out}(t) &= x_2(t)(x_2(t) + x_3(t))^{-1} w_{mgo}(t), \\ w_{o,out}(t) &= x_3(t)(x_2(t) + x_3(t))^{-1} w_{mgo}(t), \end{aligned}$$

sendo  $w_{mgo}$  a vazão da mistura gás-líquido na saída do tubo,  $u_1$  e  $u_2$  os sinais de controles correspondentes às aberturas das válvulas (*choke*) de entrada de gás e de produção de óleo.  $\mu_a$  e  $\mu_t$  representam as densidades de gás no anular e da mistura gás-líquido, respectivamente;  $P_a$ ,  $P_t$ ,  $P_{fp}$ ,  $P_{tt}$  representam, respectivamente, as pressões no anular, no tubo, no fundo do poço e no topo do tubo. Essas variáveis são descritas através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= \left( \frac{T_a R}{M_g V_a} + \frac{g L_a}{H_a} \right) x_1(t), \\ P_{tt}(t) &= T_t R \mu_o x_2(t) M_g^{-1} (V_t \mu_o - x_3(t))^{-1}, \\ P_t(t) &= P_{tt}(t) + (x_2(t) + x_3(t)) g A_t^{-1}, \\ P_{fp}(t) &= P_t(t) + \mu_o g H_{fp}, \\ \mu_a(t) &= M_g (T_a R)^{-1} P_a(t), \\ \mu_t(t) &= (x_2(t) + x_3(t)) (V_t)^{-1}. \end{aligned}$$

*Nota 1.* Todos os parâmetros são apresentados, em detalhe, na versão estendida deste artigo, disponível online.

## 2. REPRESENTAÇÕES LPV

A primeira etapa para a síntese de controladores preditivos não lineares tipo LPV consiste na obtenção de uma representação LPV exata do processo não linear controlado, descrito pela seguinte equação à diferenças:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \\ y(k) &= g(x(k), u(k)). \end{aligned} \quad (2)$$

Na Eq. (2), consideramos que as funções (não lineares)  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são analíticas, contínuas, diferenciáveis e possuem todas as derivadas contínuas e limitadas. No estudo de caso do processo de *gas-lift*, a função  $f(\cdot)$  é obtida diretamente pela discretização Euler da Eq. (1).

Consideramos que os estados  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  são mensuráveis para toda amostra discreta  $k \geq 0$ , tal como as saídas  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ . No contexto de MPC,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  define um sinal de controle preditivo que deve garantir um desempenho ótimo (discussões na Seção 4), ao passo que deve satisfazer as *condições de admissibilidade* do sistema, ou seja, um regulção condizente com as restrições físicas e naturais do processo, representadas matematicamente por:

$$\begin{cases} x(k) \in \mathcal{X}, \forall k \geq 0, \\ y(k) \in \mathcal{Y}, \forall k \geq 0, \\ u(k) \in \mathcal{U}, \forall k \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

sendo  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{U}$  conjuntos fechados, convexos e conhecidos. Em termos práticos, estes conjuntos definem condições derivadas da prática; por exemplo, uma válvula de injeção de gás, cuja abertura é limitada entre 0 a 100%, define um conjunto de controle admissível  $\mathcal{U}$  do tipo  $[0, 1]$ . Para fins de praticidade, consideramos doravante os seguintes conjuntos tipo caixa, considerando  $\bar{v}_i$  como o limite de magnitude para a  $i$ -ésima componente da variável  $v$ :

$$\begin{cases} \mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid |x_j| \leq \bar{x}_j \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_x]}\}, \\ \mathcal{Y} := \{y \in \mathbb{R}^{n_y} \mid |y_j| \leq \bar{y}_j \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_y]}\}, \\ \mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \mid |u_j| \leq \bar{u}_j \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}\}. \end{cases} \quad (4)$$

Uma vez conhecida a representação discreta não linear do processo controlado, Eq. (2), tal como as restrições de admissibilidade, Eq. (3), o **primeiro passo** necessário é a transcrição das trajetórias do sistema, dentro dos domínios admissíveis, através de modelo LPV. Para tal, devido a sua simplicidade e notório sucesso, c.f. (Hoffmann and Werner, 2014; Morato et al., 2020; Robles et al., 2019), consideramos o uso das chamadas inclusões quasi-LPV exatas (*qLPV embeddings*). Para tal, pressupomos que, no contexto do sistema controlado, há como encapsular as não linearidades em variáveis de agendamento mensuráveis. Analiticamente, tal hipótese impõe a necessidade de existência de mapas analíticos, limitados e diferenciáveis  $h_1(x, u) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times n_x}$  e  $h_2(x, u) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times n_u}$  de tal forma que, para todo  $x \in \mathcal{X}$  e todo  $u \in \mathcal{U}$ , verifique-se:

$$\begin{bmatrix} f(x, u) \\ g(x, u) \end{bmatrix} = h_1(x, u)x + h_2(x, u)u. \quad (5)$$

Assim, com base na condição de necessidade imposta pela Eq. (5), o modelo original da Eq. (2) pode ser rescrito na seguinte forma LPV:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \\ y(k) &= C(\rho(k))x(k) + D(\rho(k))u(k). \end{aligned} \quad (6)$$

No modelo LPV da Eq. (6), as variáveis de agendamento são, por definição, limitadas, ou seja,  $\rho(k) \in \mathcal{P}$ ,  $\forall k \geq 0$  e, ademais, é imposta uma relação de interdependência com os estados e os sinais de controle, ou seja,  $\rho(k) = f_\rho(x(k), u(k))$ . A função  $f_\rho(x, u)$  é chamada de *proxy LPV*<sup>2</sup>, ao passo que o conjunto  $\mathcal{P}$  é chamado de conjunto de agendamento. Em termos práticos, ressaltamos que, uma vez que os sinais  $x$  e  $u$  são conhecidos e mensuráveis, o parâmetro  $\rho$  pode ser diretamente inferido. A seguir, aplicamos estes conceitos ao estudo de caso.

### 3. ESTIMANDO PARÂMETROS FUTUROS

Uma vez obtida a representação LPV do processo controlado, passamos a utilizá-la para a *predição* das dinâmicas futuras do sistema, ao longo de um horizonte futuro de  $N_p$  passos, para fins do projeto de um algoritmo MPC. Para tal predição, calculamos os estados futuros  $x(k+j)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$  que dependem, dada a estrutura LPV da Eq. (6), dos valores futuros dos parâmetros de agendamento  $\rho(k+j-1)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$ . Entretanto, apenas o

<sup>2</sup> Sem perda de generalidade, consideramos doravante que o proxy LPV é apenas estado-dependente, ou seja,  $\rho(k) = f_\rho(x(k))$ , tal como no estudo de caso do *gas-lift*.

sinal de agendamento amostrado  $\rho(k)$  é conhecido a cada instante de tempo.

Neste caso, a *segunda etapa* do projeto consiste em desenvolver uma lei (de baixo custo numérico) para extrapolar/estimar as trajetórias futuras dos parâmetros de agendamento. Na literatura, podemos encontrar três principais alternativas para esse procedimento: (1) O uso de "congelamento", ou seja, considerar que os parâmetros de agendamento não se alterarão ao longo do horizonte de predição, do ponto de vista de cada instante de amostragem:  $\rho(k+j|k) = \rho(k)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p-1]}$ . Essa abordagem, apesar de simplória e, de certa forma, ingênua, pode resultar em desempenhos práticos de relevância. Todavia, devido à grande incerteza de predição suscitada, a abordagem resulta no projeto de algoritmos MPC mais conservadores<sup>3</sup>; (2) O uso de estimativas com base na iteração do problema de otimização MPC de forma sequencial, tal como originalmente proposto por Cisneros and Werner (2017) e amplamente utilizado desde então, c.f. (Cisneros and Werner, 2019). A ideia, nesse caso, é usar o proxy  $\rho(k+j|k) = f_\rho(x(k+j|k))$  recursivamente, no qual a sequência de estados futuros  $x(k+j|k)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p-1]}$  é obtida da última iteração do problema de otimização. Tal como elaborado em (Cisneros and Werner, 2019), pode-se demonstrar que a trajetória predita de parâmetros futuros converge para a trajetória real, ao passo que o programa de otimização torna-se mais complexo (resolve-se  $n_i$  QPs por amostra); (3) O uso de extrapolação com base em uma aproximação da função  $f_\rho(\cdot)$ , tal como proposto recentemente em (Morato et al., 2022b). A fim de suavizar o cômputo numérico da abordagem de Cisneros and Werner (2017), esse método também garante a convergência da trajetória predita de parâmetros futuros para a trajetória real, ao passo que baseia-se apenas em operadores lineares. Neste artigo, usaremos essa última metodologia.

Doravante, consideramos  $\hat{P}_k$  como a "trajetória futura (predita) de agendamento", ou seja,  $\text{col}\{\rho(k|k), \rho(k+1|k), \dots, \rho(k+N_p-1|k)\}$ . Similarmente, tomamos  $\hat{X}_k$  como  $\text{col}\{x(k+1|k) \dots x(k+N_p|k)\}$  como os estados futuros (preditos). Assim, prosseguimos detalhando a ideia principal disposta em (Morato et al., 2022b): construir  $\hat{P}_k$  recursivamente, com base em  $\hat{P}_{k-1}$ , e aproveitando de uma expansão de Taylor de primeira ordem da função  $\rho(k+j|k) = f_\rho(x(k+j|k))$ . Ressaltamos que a principal vantagem deste método é que, além de produzir estimativas *convergentes*, com erro residual limitado, apenas operadores lineares são necessários.

O método constrói-se da seguinte forma<sup>4</sup>: consideramos, primeiramente, a seguinte expansão de Taylor:

$$f_\rho(x) = f_\rho(\check{x}) + f_\rho^\partial(x - \check{x}) + \xi_\rho, \quad (7)$$

sendo  $\check{x} \in \mathcal{X}$  um ponto de expansão admissível,  $f_\rho^\partial := \left. \frac{\partial f_\rho(x)}{\partial x} \right|_{x=\check{x}}$  a derivada do proxy LPV, considerando este de classe  $\mathcal{C}^1$ , e  $\xi_\rho$  um termo residual que incorpora o

<sup>3</sup> Devido à incerteza incluída implicitamente ao modelo de predição por congelamento, o projeto dos algoritmos MPC, neste caso, deve levar em conta a estabilização para todos os valores possíveis dos sinais de agendamento futuros, através de argumentos de robustez.

<sup>4</sup> Aqui, consideramos  $\delta x(k) = x(k+1) - x(k)$  e, portanto,  $\delta \hat{X}_k := [\delta x(k|k) \dots \delta x(k+N_p-1|k)]^T$ .

erro de aproximação. Assim, desconsiderando os termos residuais, podemos re-escrever toda a trajetória futura de agendamento, com base na Eq. (7), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho(k+1|k) &= \rho(k|k-1) + f_\rho^\partial(k)\delta x(k|k), \\ \rho(k+2|k) &= \rho(k+1|k-1) + f_\rho^\partial(k+1)\delta x(k+1|k), \\ &\vdots \\ \rho(k+N_p-1|k) &= \rho(k+N_p-2|k-1) \\ &\quad + f_\rho^\partial(k+N_p-2)\delta x(k+N_p-2|k). \end{aligned} \quad (8)$$

Na Eq. (8), os termos  $f_\rho^\partial(k+j)$  e  $\delta x(k+j|k)$ , para todo  $j \in \mathbb{N}_{[1, N_p-2]}$ , são desconhecidos. Todavia, tal como recomenda-se em (Morato et al., 2022b), essas variáveis são substituídas, respectivamente, por  $f_\rho^\partial(k)$  e  $\delta x(k+j|k-1)$ , ou seja: (a) considera-se, implicitamente, que a derivada parcial  $f_\rho^\partial(k+j) := \left. \frac{\partial f_\rho(x)}{\partial x} \right|_{x(k+j)}$  é constante e igual a  $f_\rho^\partial(k)$ , de valor conhecido no instante amostrado  $k$ ; e (b) a trajetória futura predita para as variações dos estados, ao longo do horizonte de predição, é recuperada da última iteração do programa de otimização, do instante  $k-1$ .

Através desse argumento, podemos estabelecer a seguinte evolução para os parâmetros de agendamento:  $\rho(k+j|k) \approx \rho(k+j-1|k-1) + f_\rho^\partial(k)\delta x(k+j-1|k-1)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p-1]}$ . Em forma vetorial, a trajetória futura (predita) de agendamento  $\hat{P}_k$  pode ser obtida com base na trajetória predita no instante anterior, ou seja  $\hat{P}_{k-1}$ , somada a um termo de correção  $f_\rho^\partial(k)\delta \hat{X}_k$ , o que resulta em:

$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k-1} + f_\rho^\partial(k)\delta \hat{X}_k, \quad (9)$$

considerando a apropriação dada por:  $\delta \hat{X}_k \approx \text{col}\{\delta x(k|k), \delta x(k+1|k-1), \dots, \delta x(k+N_p-2|k-1)\}$ .

Em termos de implementação da Eq. (9), ressaltamos os seguintes detalhes:

- No instante de amostra inicial, ou seja  $k = 0$ , não há estimativa prévia disponível. Portanto, toma-se, simplesmente, a estimativa inicial como  $\hat{P}_0 = [\rho^T(0) \ \rho^T(0) \ \dots \ \rho^T(0)]^T$ , ou seja um vetor com  $N_p$  entradas repetidas do parâmetro de agendamento medido  $\rho(0)$ .
- Para as amostras seguintes:
  - (1) O vetor de variações dos estados  $\delta \hat{X}_k$  é construído com base na solução do algoritmo de otimização da amostra anterior,  $\delta \hat{X}_{k-1}$ ;
  - (2) A derivada parcial é avaliada para o instante amostral atual, ou seja,  $f_\rho^\partial(k) = \left. \frac{\partial f_\rho(x)}{\partial x} \right|_{x(k)}$ ;
  - (3) Por fim, a trajetória futura de agendamento predita é calculada através da Eq. (9).

Enfatizamos que na Eq. (9), o termo residual  $\xi_\rho$ , proveniente da expansão de Taylor da Eq. (7) foi negligenciado. Todavia, resultados concretos estão disponíveis na literatura demonstrando como estes termos tendem a zero, com o passar das amostras, c.f. (Morato et al., 2022a,b). Nestas referências, demonstra-se como obter um limite superior para a norma do termo residual, como também

condições de suficiência para convergência do método de extrapolação.

*Nota 2.* A grande vantagem do método desenvolvido nestes artigos consiste no fato desse gerar estimativas convergentes, com erros residuais limitados, com base, unicamente, em operadores *lineares*. Desta forma, a trajetória predita  $\hat{P}_k$  possui baixo custo numérico e resulta em um erro de predição reduzido, permitindo a síntese de controladores preditivos rápidos e pouco conservadores.

#### 4. MPC LPV: ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Com base na predição da trajetória futura de agendamento  $\hat{P}_k$ , podemos prosseguir com detalhes da síntese do controlador preditivo em si. Portanto, nessa Seção, discutimos aspectos de projeto e de implementação.

Retomamos o problema: buscamos um algoritmo controle MPC para controlar o sistema não linear, originalmente descrito pela Eq. (2), com base em sua representação LPV apresentada nas Eq. (6). Para tal, consideramos as restrições operacionais de admissibilidade da Eq. (3), que devem ser respeitadas para todo instante de tempo. Ademais, levando em conta a metodologia do controle preditivo, preocupamo-nos com as trajetórias futuras das variáveis de interesse ao longo de um horizonte futuro de  $N_p$  amostras. Nesse sentido, consideramos a trajetória de agendamento futura  $\hat{P}_k$ .

Relembramos que, no contexto de MPC, uma nova lei de controle ótima  $u(k)$  é gerada a cada amostra discreta de tempo  $k$ , através da resolução de um problema de otimização, denominado doravante de  $\mathfrak{D}_k$ . Portanto, o primeiro aspecto de interesse para a síntese de tal controlador preditivo é a lei de predição a ser usada em cada  $\mathfrak{D}_k$ , ou seja, qual é a relação entre as variáveis futuras e as variáveis medidas na amostra atual.

Assim, além do vetor de estados futuros (preditos)  $\hat{X}_k$  e da trajetória (predita) de agendamento  $\hat{P}_k$ , consideramos: a sequência<sup>5</sup> de sinais de controle a ser aplicada, dada por  $U_k := \text{col}\{u(k|k), \dots, u(k+N_p-1|k)\}$ , como o vetor das saídas futuras (preditas), dado por  $\hat{Y}_k := \text{col}\{y(k|k), \dots, y(k+N_p-1|k)\}$ . Com base nessa construção vetorial, podemos descrever as variáveis futuras através da seguinte lei de predição, obtida pela expansão da Eq. (6) ao longo do horizonte:

$$\begin{cases} X_k = \mathcal{A}(\hat{P}_k)x(k) + \mathcal{B}(\hat{P}_k)U_k, \\ Y_k = \mathcal{C}(\hat{P}_k)x(k) + \mathcal{D}(\hat{P}_k)U_k. \end{cases} \quad (10)$$

As matrizes de predição  $\mathcal{A}(P_k) \in \mathbb{R}^{(n_x N_p) \times n_x}$ ,  $\mathcal{B}(P_k) \in \mathbb{R}^{(n_x N_p) \times n_u}$ ,  $\mathcal{C}(P_k) \in \mathbb{R}^{(n_y N_p) \times n_x}$ , e  $\mathcal{D}(P_k) \in \mathbb{R}^{(n_y N_p) \times n_u}$ , mantêm estrutura e forma a cada amostra e, portanto, podem ser calculadas de forma eficiente.

Com base na lei de predição colocada na Eq. (10), a implementação de um algoritmo de controle preditivo LPV, portanto, se dá através da resolução do seguinte problema de otimização  $\mathfrak{D}_k$ , a cada amostra de tempo discreta  $k \geq 0$ :

<sup>5</sup> Negligenciamos o uso da notação com circunflexo no vetor  $U_k$ , uma vez que esse vetor não é apenas um vetor de variáveis preditas, como também a variável de decisão do problema de otimização  $\mathfrak{D}_k$ .

$$\begin{aligned} \min_{U_k} \quad & J(X_k, Y_k, U_k), \quad (11) \\ \text{t.q. :} \quad & \begin{cases} X_k = \mathcal{A}(\hat{P}_k)x(k) + \mathcal{B}(\hat{P}_k)U_k, \\ Y_k = \mathcal{C}(\hat{P}_k)x(k) + \mathcal{D}(\hat{P}_k)U_k, \\ x(k+j|k) \in \mathcal{X}, j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}, \\ y(k+j-1|k) \in \mathcal{Y}, j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}, \\ u(k+j-1|k) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}, \\ x(k+N_p|k) \in \mathbf{X}_f. \end{cases} \end{aligned}$$

O problema de otimização  $\mathfrak{D}_k$ , tal como colocado na Eq. (11), contém as restrições de admissibilidade do processo (os sinais de estado, saída e controle considerados devem respeitar as restrições físicas do sistema), tal como uma *restrição terminal* para a trajetória dos estados ( $x(k+N_p|k)$  deve pertencer ao *conjunto terminal*  $\mathbf{X}_f$ ). Consideramos, nesse problema de otimização, a função de custo quadrática dada por:

$$\begin{aligned} J_k = J(X_k, U_k) := & V(x(k+N_p|k)) \quad (12) \\ & + \sum_{j=1}^{N_p-1} \ell(x(k+j|k), u(k+j-1|k)), \end{aligned}$$

sendo  $V(\cdot)$  um *custo terminal* quadrático e  $\ell(x, u)$  um *custo de etapa* quadrático, genericamente ilustrado por:

$$\ell(x, u) := \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2, \quad (13)$$

sendo  $Q$  e  $R$  matrizes de ponderação definidas positivas, usadas para impor o objetivo de controle ao processo.

Assumindo que as restrições de admissibilidade são convexas, e uma vez que  $\mathfrak{D}_k$  possui um custo quadrático  $J_k$ , para toda amostra discreta  $k \geq 0$ , tal como uma lei de predição linear (note que Eq. (10) é linear para cada vetor  $\hat{P}_k$ ), torna-se fato que  $\mathfrak{D}_k$  é um **programa de otimização quadrático** (QP), podendo ser resolvido em *tempo real*, na escala dos microssegundos<sup>6</sup>.

Ressaltamos que a solução amostrada desse problema, dita  $U_k^*$ , é uma sequência de ações de controle, cuja primeira entrada,  $u^*(k|k)$ , é aplicada ao processo. A implementação, de fato, se dá na seguinte ordem:

- Etapa de projeto (*offline*):
  - (1) Ajusta-se o custo de etapa  $\ell(x, u)$  conforme o objetivo de controle, ajustando as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ ;
  - (2) Calculam-se os ditos *ingredientes terminais*: o custo terminal  $V(x(k+N_p|k))$  e o conjunto terminal  $\mathbf{X}_f$ .
- Durante a implementação (*online*), para todo  $k \geq 0$ :
  - (1) Mede-se o estado atual  $x(k)$  e calcula-se o parâmetro de agendamento correspondente  $\rho(k)$ , através do proxy de agendamento  $f_\rho(\cdot)$ ;
  - (2) Obtém-se a trajetória futura de agendamento  $\hat{P}_k$  através da lei de extrapolação da Eq. (9) (etapas apresentadas no final da Seção 3);
  - (3) Monta-se a lei de predição conforme a Eq. (10);
  - (4) Resolve-se o programa de otimização quadrático  $\mathfrak{D}_k$ , apresentado na Eq. (11), cuja solução é  $U_k^*$ ;
  - (5) Aplica-se a lei de controle preditiva LPV  $u^*(k|k)$ .

*Nota 3.* Ingredientes terminais  $V(\cdot)$  e  $\mathbf{X}_f$  são amplamente utilizados na literatura de controle preditivo para garantias de estabilidade em malha fechada e de factibilidade recursiva da otimização, c.f. (Limon et al., 2018; Morato et al., 2023). Na versão estendida deste artigo-tutorial, <https://arxiv.org/abs/2304.14981>, apresentamos uma abordagem computacionalmente factível para o cômputo desses elementos; também apresentamos discussões sobre rastreamento de referências.

## 5. APLICAÇÃO AO ESTUDO DE CASO

A seguir, exemplificamos a aplicação MPC com o ferramental LPV para o estudo de caso do processo de *gas-lift*. Para fins de controle na operação de plataformas de petróleo, consideramos como variáveis de interesse a vazão de entrada de gás  $w_{g,in}(k)$  com o objetivo de minimizar os custos associados ao uso de gás e a pressão no fundo do poço  $P_{fp}(k)$  com o intuito de maximizar a produção de óleo. Os valores de referência de regime permanente para essas variáveis, são ajustados de acordo com as necessidades específicas da operação de extração. Por exemplo, em um cenário em que se deseja apenas maximizar a produção de óleo, pode ser necessário injetar uma grande quantidade de gás para aumentar a diferença de pressão entre o reservatório e o tubo. No entanto, isso pode resultar em uma produção na saída do *choke* predominantemente composta por gás, o que pode não ser desejável. Portanto, nas plataformas de petróleo, os valores de referência para essas variáveis são determinados por meio de um processo de otimização.

Especificamente, consideramos, neste estudo de caso, apenas o controle local de vazões e pressões, dadas suas referências. Portanto, para o projeto do controlador, usamos:  $N_p = 6$ ,  $Q = \text{diag}(10^{-12} \quad 8 \cdot 10^{-3})$ ,  $R = \text{diag}(1 \quad 1)$ , considerando  $\ell(x, u) := \|x - x_r\|_Q + \|u - u_r\|_R$ .

Para ilustrarmos a eficácia da abordagem LPV, a comparamos<sup>7</sup> com um software NMPC de ponta CasADi, amplamente discutido em termos do estado-da-arte, c.f. (Andersson et al., 2019; Gros et al., 2020). Nas Figs. 1 e 2, apresentamos, respectivamente, a evolução dos estados do sistema, os sinais de controle obtidos com os dois algoritmos e as saídas controladas ( $P_{fp}$  e  $w_{g,in}$ ). Discorremos sobre resultados obtidos a seguir: (1) Primeiramente, enfatizamos que método LPV é capaz de obter um desempenho de controle numericamente equivalente ao obtido com o NMPC. Este fato é de grande relevância, uma vez que o software CasADi é usado, tanto na literatura tal como na prática industrial, como referência para algoritmos NMPC embarcados; (2) O esforço numérico médio necessário para o cálculo do sinal de controle, com a metodologia LPV, é muito reduzido, uma vez que apenas um QP é resolvido por amostra. De fato, a abordagem LPV leva um tempo médio de 26 ms para o cômputo da lei de controle, ao passo que CasADi toma, em média, 288 ms. (3) Em suma, podemos concluir que, de fato, a abordagem LPV MPC permite um desempenho de controle equiparável, com um cômputo tolerável para aplicações em tempo-real, inferior ao período de amostragem. Ressaltamos, também, que o

<sup>7</sup> Os resultados apresentados a seguir foram obtidos em simulação numérica operacionalizada com Matlab, Python, Yalmip e Gurobi em um PC de 2.1 GHz e 8 GB RAM.

<sup>6</sup> O tempo de resolução também depende do processador e do *solver*.

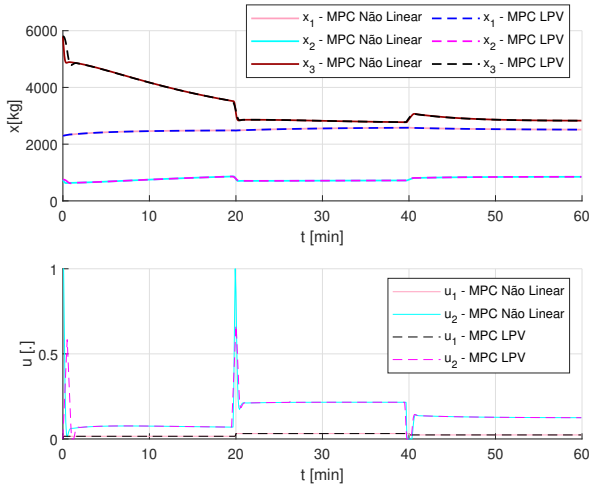


Figura 1. Processo do *gas-lift*: Estados e controle.

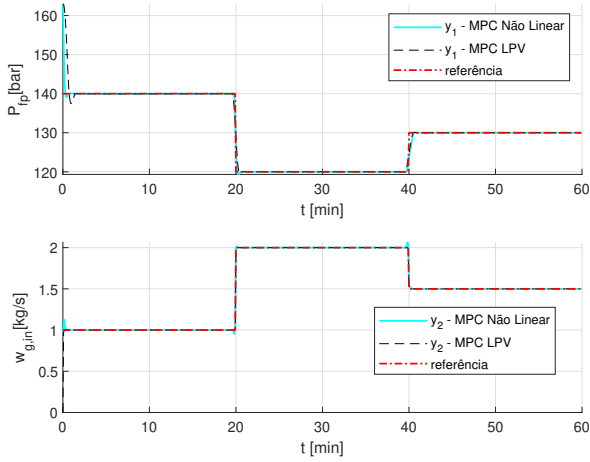


Figura 2. Processo do *gas-lift*: Saídas  $P_{fp}$  e  $w_{g,in}$ .

tempo médio necessário para o cômputo, é dez vezes menor do que quando implementa-se um NMPC com CasADi.

## 6. CONCLUSÕES

Neste artigo, apresentamos um tutorial detalhado sobre o projeto de controladores preditivos não lineares com base em modelos LPV. Abordamos todas as etapas necessárias para a síntese, desde modelagem até detalhes de implementação. Por fim, apresentamos um estudo de caso numérico, comparando as abordagens MPC LPV e não linear, considerando um sistema de extração de petróleo por elevação artificial com injeção de gás. Ressaltamos as principais vantagens: (1) A representação LPV permite uma descrição exata de dinâmicas não lineares, sem requerer qualquer tipo de aproximação ou linearização local; (2) A predição de dinâmicas futuras, com base em modelo LPV, é uma operação linear a cada amostra. Desta forma, o programa de otimização resultante torna-se computacionalmente mais suave que no caso não linear; (3) Diversos resultados, incluso o aqui apresentado, indicam a similaridade de desempenho de controle das técnicas MPC LPV com algoritmos MPC não lineares, além da competitividade numérica quando comparadas a ferramentas MPC

não lineares rápidas (e.g. ACADO, CasADi). No estudo de caso do *gas-lift*, a abordagem LPV MPC permite um tempo de cômputo 11 vezes menor.

## REFERÊNCIAS

- Andersson, J.A.E., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J.B., and Diehl, M. (2019). CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 11(1), 1–36.
- Cisneros, P.G. and Werner, H. (2017). Fast nonlinear MPC for reference tracking subject to nonlinear constraints via quasi-LPV representations. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 11601–11606.
- Cisneros, P.S. and Werner, H. (2019). Wide range stabilization of a pendubot using quasi-LPV predictive control. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28), 164–169.
- Gros, S., Zanon, M., Quirynen, R., Bemporad, A., and Diehl, M. (2020). From Linear to Nonlinear MPC: Bridging the Gap via the Real-time Iteration. *International Journal of Control*, 93(1), 62–80.
- Hoffmann, C. and Werner, H. (2014). A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(2), 416–433.
- Limon, D., Ferramosca, A., Alvarado, I., and Alamo, T. (2018). Nonlinear MPC for tracking piece-wise constant reference signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11), 3735–3750.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2022a). A tracking model predictive control for input-output LPV systems using parameter extrapolation. In *5<sup>th</sup> IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, 55–60. IFAC.
- Morato, M.M., Cunha, V.M., Santos, T.L., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2021). Robust nonlinear predictive control through qlpv embedding and zonotope uncertainty propagation. *IFAC-PapersOnLine*, 54(8), 33–38.
- Morato, M.M., Holicki, T., and Scherer, C. (2023). Stabilizing model predictive control synthesis using integral quadratic constraints and full-block multipliers.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2020). Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey. *Annual Reviews in Control*, 49, 64–80.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2022b). Sufficient conditions for convergent recursive extrapolation of qlpv scheduling parameters along a prediction horizon. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Morato, M.M., Napolini, A., Normey-Rico, J., and Sename, O. (2022c). NMPC via qLPV models and Taylor-based scheduling parameter extrapolation: A cartesian robot case study. In *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Mediterranean Conference of Control and Automation*.
- Robles, R., Sala, A., and Bernal, M. (2019). Performance-oriented quasi-LPV modeling of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(5), 1230–1248.