

Projeto, Construção e Modelagem Não Linear do Oscilador de Quadratura

Victor H. S. Bittencourt* Wanderley C. Silva Junior*
Arthur N. Montanari** Leandro Freitas***

* *Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Betim, Betim, MG, Brasil (victorhugo.bittencourt@gmail.com).*

** *Departamento de Física e Astronomia, Northwestern University, Evanston, IL, EUA.*

*** *Departamento de Automação Industrial e Tecnologia da Informação, Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Betim, Betim, MG, Brasil.*

Abstract: The study of networks of coupled oscillators enables the development of a broad range of methods for the analysis and control of complex systems. The Kuramoto model stands out as a dynamical model for synchronization analysis in the field. This paper proposes the implementation of an electronic circuit, the quadrature oscillator, to represent and analyze the dynamical behavior of a Kuramoto oscillator in an experimental setting in which external noise and parametric uncertainties are ubiquitously present. Other circuits have been proposed for this purpose, but they lack robust regulation of the oscillation amplitude. We developed a nonlinear model of the circuit (in contrast to previously developed linear models), along with its electronic design, construction, and validation. The results exhibit strong agreement between the model and experiments, providing new perspectives for the utilization of these oscillators in studies of complex networks.

Resumo: O estudo de osciladores conectados em rede permite o desenvolvimento de diversas ferramentas para a análise e controle de sistemas complexos. O modelo de Kuramoto destaca-se na área como um modelo dinâmico para análise de sincronismo. Este trabalho propõe a implementação de um circuito eletrônico, o oscilador de quadratura, para representar e analisar o comportamento dinâmico de um oscilador de Kuramoto em um contexto experimental no qual ruído externo e incerteza paramétrica estão inevitavelmente presentes. Outros circuitos já foram propostos para este fim, mas não possuem uma regulação robusta da amplitude de oscilação. Foi desenvolvido o modelo não linear do circuito (em contraste com modelos lineares previamente desenvolvidos), seu projeto eletrônico, construção e validação. Os resultados apresentaram boa concordância entre o modelo e os experimentos, proporcionando novas perspectivas para o uso destes osciladores em redes complexas.

Keywords: quadrature oscillator; nonlinear dynamics; Kuramoto oscillator; synchronization; complex networks

Palavras-chaves: oscilador de quadratura; dinâmica não-linear; oscilador de Kuramoto; sincronismo; redes complexas

1. INTRODUÇÃO

O estudo de redes dinâmicas e sincronismo espontâneo é de profundo interesse em diversos contextos, como para compreender a dinâmica de modelos epidemiológicos, reações químicas, sistemas mecânicos, redes regulatórias genéticas e redes neuronais (Ódor and Kelling, 2019; Rodrigues et al., 2016). Dentre os diversos modelos que descrevem o sincronismo de osciladores, o modelo de Kuramoto (Kuramoto, 1975) é o mais popular no contexto de redes complexas (Rodrigues et al., 2016; Ódor and Kelling, 2019). Apesar do seu comportamento isolado ser puramente senoidal, é possível observar uma variedade de comportamentos dinâmicos emergentes quando estes osciladores são

interconectados em redes, incluindo sincronismo explosivo, estados de quimera, caos, entre outros (Rodrigues et al., 2016; Bick et al., 2018).

O modelo de Kuramoto é descrito por

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{k}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (1)$$

onde θ_i é a fase do i -ésimo oscilador, ω_i é a frequência natural do i -ésimo oscilador, n é o número de osciladores e k determina a força de acoplamento. Esta representação reducionista de sistemas osciladores acoplados permite a derivação de resultados analíticos de estabilidade e convergência do estado sincronizado (Dörfler et al., 2013;

Montanari et al., 2019). Apesar do amplo uso do modelo na área, a maioria dos resultados é validada por meio de experimentos numéricos ou com dados medidos em ambientes não controlados. São poucos os trabalhos que oferecem validação experimental em ambientes controlados e flexíveis (English et al., 2015).

Neste cenário, o desenvolvimento de circuitos eletrônicos se mostra como uma alternativa interessante devido ao seu baixo custo, flexibilidade no ajuste de parâmetros e na definição da topologia da rede dinâmica. Trabalhos anteriores exploraram o uso do circuito oscilador eletrônico ponte de Wien (Temirbayev et al., 2013; English et al., 2015, 2016) que, apesar do seu baixo custo, apresenta certa sensibilidade na amplitude com relação à frequência de oscilação, podendo causar o esvaimento da oscilação ou sua saturação. Por outro lado, o oscilador de quadratura (Graeme et al., 1971; Sedra and Smith, 2014) se mostra como uma alternativa para conciliar as características de baixo custo, flexibilidade no ajuste da frequência e boa robustez quanto à amplitude de oscilação. No entanto, o uso deste oscilador no contexto de redes complexas ainda não foi explorado e as modelagens matemáticas disponíveis do circuito se limitam a modelos lineares aproximados.

O objetivo deste trabalho é projetar, modelar e construir o circuito oscilador de quadratura, com frequência ajustável, para futuras aplicações no estudo de sincronismo em redes complexas. Será apresentado o projeto eletrônico e seu modelo não-linear, bem como sua validação experimental.

A Seção 2 aborda as principais características conhecidas do circuito, seguida da modelagem numérica não linear na Seção 3. Os resultados numéricos obtidos pela simulação do modelo são apresentados na Seção 4, enquanto a Seção 5 inclui a construção do circuito e os resultados experimentais para validação do modelo.

2. CIRCUITO DO OSCILADOR DE QUADRATURA

O oscilador de quadratura é um circuito conhecido por produzir formas de onda senoidais (Sedra and Smith, 2014; Graeme et al., 1971). Em comparação com o circuito ponte de Wien, utilizado em trabalhos anteriores para mimetizar o comportamento de um oscilador de Kuramoto (Temirbayev et al., 2013; English et al., 2015, 2016), o oscilador de quadratura apresenta as seguintes vantagens (Graeme et al., 1971):

- (1) Duas variáveis, cosseno e seno, estão disponíveis simultaneamente nas saídas;
- (2) A oscilação é estabilizada sem introduzir distorção excessiva por meio de técnicas relativamente simples;
- (3) A amplitude das oscilações não varia muito com as variações na frequência natural.

Esse circuito é composto por dois circuitos integradores em laço e é projetado para que haja uma pequena divergência na amplitude da oscilação, que é controlada por um circuito limitador de amplitude, ilustrado na Figura 1.

Assumindo condições iniciais pequenas (e.g., capacitores com baixa carga), para que a amplitude das oscilações se eleve, é necessário que o produto R_1C_1 seja maior que o valor de $(R_2 + R_{V1})C_2$, fazendo com que os polos do sistema (linearizado) estejam alocados no semiplano

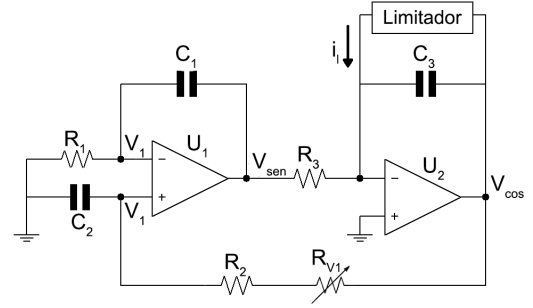


Figura 1. Esquemático do circuito oscilador de quadratura mostrando o laço composto por dois integradores e o limitador de amplitude que atua no segundo amplificador operacional, U_2 . Fonte: adaptado de Graeme et al. (1971).

direito do plano s . A partir de certo limiar de amplitude, o limitador não linear entra em ação, mantendo as oscilações com amplitude fixa. Ao projetar a resistência de realimentação R_{V1} como variável, é possível ajustar a frequência de oscilação do circuito, determinada por:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1C_1(R_2 + R_{V1})C_2}}, \quad (2)$$

em que f_0 é a frequência de oscilação em Hertz.

O limitador de amplitude é um circuito composto por dois diodos e um arranjo de resistores, mostrado na Figura 2. Quando o módulo da tensão v_{cos} se eleva acima de um limiar, um dos diodos começa a conduzir, estabilizando as oscilações. Esse método de estabilização de amplitude apresenta desempenho satisfatório para osciladores na faixa de 1 Hz a 10 kHz (Sedra and Smith, 2014; Graeme et al., 1971), sendo suficiente para os objetivos deste trabalho, que é produzir um oscilador de baixa frequência.

Deve-se ressaltar que a forma de onda do $v_{cos}(t)$ será sempre mais distorcida que o sinal $v_{sen}(t)$ dado que a não linearidade é produzida na saída de U_2 (Fig. 1). O sinal $v_{cos}(t)$, por sua vez, é filtrado pelo primeiro integrador na tensão de pico da saída do segundo integrador, produzindo assim um sinal $v_{sen}(t)$ mais suave.

3. MODELO NÃO LINEAR DO OSCILADOR

A fim de encontrar as equações diferenciais do sistema, foram obtidas as equações das correntes dos nós referentes às entradas dos amplificadores operacionais U_1 e U_2 (Fig. 1) conforme a 1ª Lei de Kirchhoff. Dessa maneira, omitindo-se as dependências explícitas do tempo, tem-se as seguintes equações dos nós:

$$\tau_1 \dot{v}_1 + v_1 - \tau_1 \dot{v}_{sen} = 0, \quad (3)$$

$$\tau_2 \dot{v}_1 + v_1 - v_{cos} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{C_3}{\tau_3} v_{sen} + C_3 \dot{v}_{cos} + i_l = 0, \quad (5)$$

em que $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = (R_2 + R_{V1})C_2$, $\tau_3 = R_3C_3$ e i_l se refere a corrente do nó $U_2(-)$ do circuito limitador (Fig. 2).

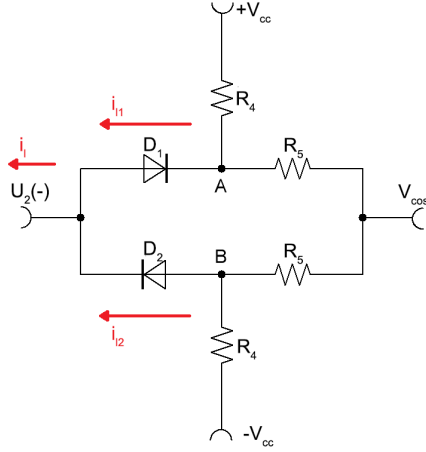


Figura 2. Circuito limitador de amplitude. Os diodos D_1 e D_2 permitem o controle da amplitude devido ao seu comportamento não linear. O sistema pode ser aproximado por um sistema linear instável quando estão em corte e por um sistema estável quando conduzem. A corrente i_l é definida pela soma das correntes i_{l1} e i_{l2} que passam pelos diodos.

Torna-se possível, por meio da equação de espaço de estados, descrever sistemas dinâmicos utilizando um conjunto mínimo de variáveis que representam seu estado atual. Para o circuito em questão, o vetor de estados é definido como $\mathbf{x} = [v_{sen} \ v_{cos} \ v_1]^T$. Após manipulações algébricas, obtém-se o seguinte modelo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_2} v_{cos} + \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right) v_1 \\ -\frac{1}{\tau_3} v_{sen} - \frac{1}{C_3} i_l \\ \frac{1}{\tau_2} v_{cos} - \frac{1}{\tau_2} v_1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Foi realizada uma análise nodal do circuito limitador apresentado na Fig. 2 para encontrar o valor de i_l . É importante ressaltar que a tensão em $U_2(-)$ será 0V devido ao aterramento da entrada não-inversora do segundo amplificador operacional. O valor de i_l é definido pela soma das correntes que passam pelos diodos D_1 e D_2 , chamadas respectivamente de i_{l1} e i_{l2} . Sabendo que a corrente será igual à 0A caso os diodos estejam abertos, os valores de corrente caso os diodos estejam conduzindo serão

$$i_{l1} = \frac{1}{R_5} v_{cos} + \frac{1}{R_4} V_{cc}, \quad (7)$$

$$i_{l2} = \frac{1}{R_5} v_{cos} - \frac{1}{R_4} V_{cc}. \quad (8)$$

Tendo em mãos a equação de espaço de estados e a corrente do circuito limitador, é viável realizar simulações do circuito por meio de integradores numéricos. Para simular a não-linearidade do diodo, foi implementada uma declaração condicional (if) para verificar se a tensão nos diodos ultrapassa o seu limite de tensão. Se isso ocorrer, a corrente no diodo é calculada por meio da equação de corrente do diodo (8). Caso contrário, a corrente é zero. É necessário, portanto, utilizar uma estrutura de controle que avalie se a tensão no diodo é suficiente para conduzi-

lo, ativando-o em caso positivo. Essa abordagem permite a simulação do circuito em diferentes condições de operação por meio de um sistema “chaveado” (*switched system*).

A escolha dos componentes foi realizada de modo a garantir uma oscilação de baixa frequência e amplitude inferior a 15 V, compatível com a placa de aquisição de dados. O valor de R_2 foi escolhido levemente maior que o de R_1 para que o conjunto $R_2 C_2$ cause uma divergência na tensão, iniciando a oscilação, que é estabilizada pelo limitador de amplitude (Graeme et al., 1971). Além disso, foi escolhido um potenciômetro R_{V1} que ofereça uma faixa próxima da frequência desejada (5 Hz) e que não cause muita distorção na forma de onda. Por meio da simulação em Python, é possível avaliar o comportamento do circuito e ajustar os valores dos componentes para que o desempenho seja melhorado.

Para obter os componentes a serem utilizados, será utilizada a fórmula de frequência do circuito de quadratura (2) apresentada em Graeme et al. (1971). Primeiramente, deve-se calcular o valor de R_1 e escolher os valores de capacitância para C_1 , C_2 e C_3 , que serão iguais. Levando em consideração a frequência desejada de 5 Hz, foi escolhido um valor de $2,2 \mu\text{F}$ para os capacitores, o que resultará em resistores na ordem de grandeza de $10^4 \Omega$. De acordo com (Sedra and Smith, 2014), o valor de R_2 será o dobro de R_1 . Assim, foi obtido seguinte valor de resistência

$$5 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 2R_1 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}} \quad (9)$$

$$R_1 \approx 10,23 \text{ k}\Omega.$$

O valor do resistor R_1 foi escolhido como o valor comercial mais próximo do calculado, ou seja, $10 \text{ k}\Omega$. Para o resistor R_2 , foi escolhido um valor de resistência pouco acima do dobro de R_1 , $22 \text{ k}\Omega$, pois apresentou desempenho ligeiramente superior ao resistor de $20 \text{ k}\Omega$, permitindo uma maior variação na faixa de frequências. Para garantir que os valores de amplitude de v_{sen} e v_{cos} sejam próximos na situação de menor amplitude, e maior frequência, escolheu-se um valor de $R_3 = 12 \text{ k}\Omega$, superior ao valor de R_1 . O valor do potenciômetro R_{V1} foi escolhido como $500 \text{ k}\Omega$ para evitar que a menor frequência fique muito abaixo de 1 Hz, o que causaria bastante distorção nas formas de onda, especialmente em v_{cos} . A Tabela 1 detalha os componentes escolhidos.

Tabela 1. Valores dos componentes.

Componente	Valor
R_1	$10 \text{ k}\Omega$
R_2	$22 \text{ k}\Omega$
R_3	$12 \text{ k}\Omega$
R_4	$22 \text{ k}\Omega$
R_5	$4,7 \text{ k}\Omega$
C_1	$2,2 \mu\text{F}$
C_2	$2,2 \mu\text{F}$
C_3	$2,2 \mu\text{F}$
R_{V1}	$500 \text{ k}\Omega$

A não-linearidade do diodo no limitador é simulada utilizando uma estrutura de controle que verifica se as tensões nos diodos são maiores que as tensões de polarização direta, V_{D1} e V_{D2} . Consequentemente, é essencial determinar as diferenças de potencial nos diodos D_1 e D_2 , representadas como V_A e V_B respectivamente (Fig. 2).

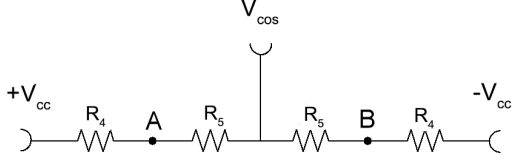


Figura 3. Circuito do limitador considerando que os diodos não estão conduzindo.

Considerando que, durante a condução dos diodos, esses valores são nulos, é necessário realizar uma análise da tensão apenas quando os diodos não estão conduzindo. O circuito assumirá a configuração exemplificada na Fig. 3.

Para determinar a tensão V_A e V_B quando os diodos não conduzem (Fig. 3), é necessário analisar a diferença de potencial dos resistores R_5 com base na contribuição de cada fonte ($+V_{cc}$, $-V_{cc}$ e v_{cos}), em que:

$$V_A = \frac{1}{R_4 + R_5} (V_{cc}R_5 + v_{cos}R_4), \quad (10)$$

$$V_B = \frac{1}{R_4 + R_5} (-V_{cc}R_5 + v_{cos}R_4). \quad (11)$$

Dado que $V_A < -V_{D1}$ e $V_B > V_{D2}$, é possível isolar v_{cos} para encontrar para quais valores de v_{cos} os diodo D_1 e D_2 conduzem, levando a seguinte função i_l no modelo (6):

$$i_l = \begin{cases} \frac{1}{R_5} v_{cos} + \frac{1}{R_4} V_{cc} & , \text{ se } v_{cos} < -\frac{R_5}{R_4} V_{cc} - \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) V_{D1} \\ \frac{1}{R_5} v_{cos} - \frac{1}{R_4} V_{cc} & , \text{ se } v_{cos} > \frac{R_5}{R_4} V_{cc} + \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) V_{D2} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (12)$$

4. RESULTADOS

O comportamento do circuito do oscilador foi simulado em Python usando a equação de espaço de estados do sistema completo. Foi utilizado um integrador numérico Runge-Kutta de 3ª ordem com um passo de integração de 0,01 s para realizar as simulações. Duas configurações diferentes de resistência do potenciômetro foram consideradas nos circuitos simulados: $R_2 + R_{V1} = 22, k\Omega$ (potenciômetro zerado) e $R_2 + R_{V1} = 522, k\Omega$ (potenciômetro no máximo). Os resultados das análises numéricas são apresentados nas Figs. 4 e 5, que mostram os valores de v_{sen} e v_{cos} no domínio do tempo e da frequência. É interessante notar que, na menor frequência, a distorção na forma de onda de v_{cos} é maior em comparação com frequências mais altas. Isso ocorre devido ao fato de que, na menor frequência, a resistência de realimentação atinge seu valor máximo, fazendo com que o limitador tenha que operar de forma mais intensa. Ademais, é notável um aumento na diferença de amplitude entre v_{sen} e v_{cos} na menor frequência, o que também é influenciado pela atuação do limitador. Através dos valores de componentes listados na Tabela 1, foi possível obter um oscilador de quadratura que varia de 1,00 a 4,88 Hertz. No que diz respeito aos valores de pico das formas de onda, temos $V_{Psen} = 4,96$ V e $V_{Pcos} = 4,54$ V para a maior frequência, $V_{Psen} = 8,95$ V e $V_{Pcos} = 6,67$ V para a menor frequência.

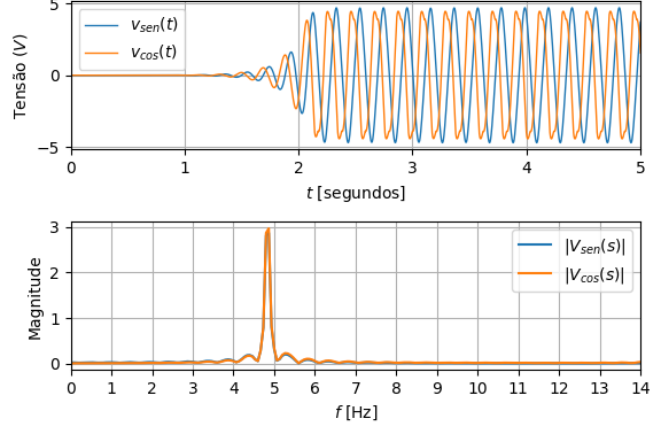


Figura 4. Tensões $v_{sen}(t)$ e $v_{cos}(t)$ com o potenciômetro R_{V1} no seu valor mínimo $R_2 + R_{V1} = 22 k\Omega$, que corresponde ao maior valor ajustado de frequência e o menor de amplitude.

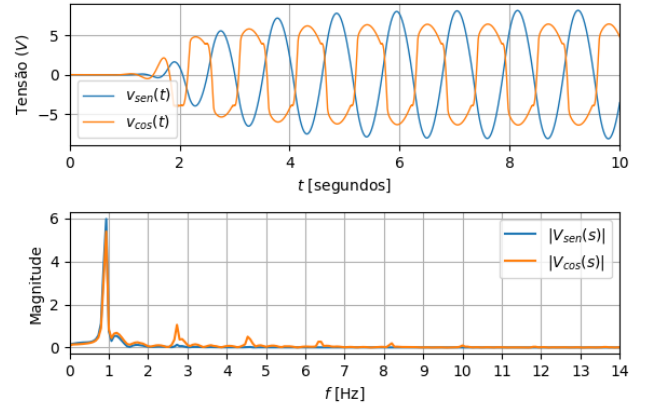


Figura 5. Tensões $v_{sen}(t)$ e $v_{cos}(t)$ com o potenciômetro R_{V1} no seu valor máximo $R_2 + R_{V1} = 522 k\Omega$, que corresponde ao menor valor ajustado de frequência e a maior de amplitude.

Uma placa de circuito impresso foi projetada e construída para permitir a análise prática do circuito oscilador de quadratura em estudos de redes complexas e sincronismo. A placa, ilustrada na Fig. 6, possui conectores para as saídas necessárias para acoplamento com outros osciladores, v_{sen} e v_{cos} , além de conectores de alimentação e LEDs que oferecem uma visualização direta das saídas do oscilador. Para garantir uma luminosidade adequada independentemente da frequência utilizada, esses LEDs foram conectados as saídas utilizando resistores de 470Ω .

Foram utilizados os mesmos valores de componentes da Tabela 1, com a diferença de que, por não serem exatamente iguais as suas correspondentes do nó A, as resistências R_5 e R_4 do limitador da Figura 2, que conectam no nó B, foram nomeadas de R_{5a} , R_{5b} , R_{4a} e R_{4b} . Ademais, a fim de obter maior precisão no modelo, os valores de cada componente foram medidos, conforme resultados na Tabela 2. Vale ressaltar que todos os componentes utilizados no circuito estão dentro dos limites de incerteza dos valores nominais, porém, mesmo pequenas variações nos valores dos componentes podem impactar na frequência e na amplitude projetada.



Figura 6. Placa de circuito impresso do oscilador de quadratura, com dimensões de 50x50 mm. A placa possui conectores para as saídas v_{sen} e v_{cos} que serão usadas para acoplamento, além de conectores para alimentação. No canto superior esquerdo da placa está o potenciômetro R_{V1} para ajuste de frequência.

Medições detalhadas foram conduzidas em três frequências distintas: uma com frequência elevada, com o potenciômetro ajustado em 10% da sua capacidade ($R_{V1} = 50\text{ k}\Omega$); outra com o potenciômetro ajustado em 90% ($R_{V1} = 450\text{ k}\Omega$); e uma última com o potenciômetro ajustado na metade do curso, ou seja, $R_{V1} = 250\text{ k}\Omega$. Para validar o modelo, foram realizadas simulações com as mesmas condições iniciais, utilizando os três valores de R_{V1} e os valores dos componentes apresentados na Tabela 2.

As simulações são apresentadas na Fig. 7. O modelo e o circuito real apresentam uma pequena diferença na frequência, o que faz com que as formas de onda estimadas pelo modelo não fiquem exatamente sobrepostas com as medidas. Essa diferença parece maior na situação de maior resistência, $450\text{ k}\Omega$. Para melhor avaliação nas amplitudes e frequências, foram realizados os ensaios descritos a seguir. Ao examinar a relação entre a amplitude e a resistência, como demonstrado na Fig. 8, observa-se uma diferença notável no comportamento das amplitudes. O modelo prevê uma diferença crescente na amplitude entre v_{cos} e v_{sen} conforme o valor de R_{V1} aumenta, com v_{Psen} iniciando aproximadamente 0,12 V maior que v_{Pcos} e terminando com uma tensão de pico aproximadamente 1,84 V maior que v_{Pcos} . Porém essa diferença é bem mais sutil nas medições experimentais e apresenta uma dinâmica diferente, com v_{cos} começando maior que v_{sen} , se igualando em $R_{V1} = 300\text{ k}\Omega$ e terminando menor na menor frequência. Em termos percentuais, a menor discrepância

Tabela 2. Valores dos componentes medidos.

Componente	Valor
R_1	10,02 k Ω
R_2	22,03 k Ω
R_3	11,89 k Ω
R_{4a}	21,58 k Ω
R_{5a}	4,66 k Ω
R_{5b}	4,66 k Ω
R_{4b}	21,93 k Ω
C_1	2,299 μF
C_2	2,221 μF
C_3	2,200 μF
R_{V1}	496 k Ω
V_{D1}	0,554 V
V_{D2}	0,565 V

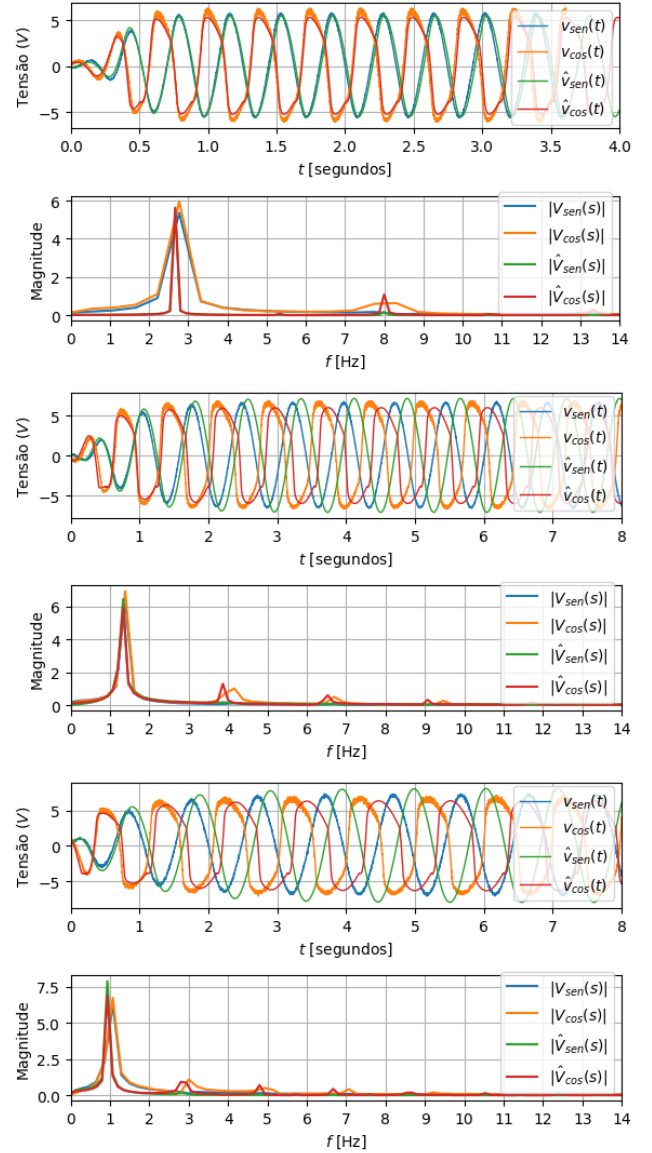


Figura 7. Curvas de v_{cos} e v_{sen} , com valores de R_{V1} iguais à $50\text{ k}\Omega$, $250\text{ k}\Omega$ e $450\text{ k}\Omega$, nessa ordem. As curvas de v_{cos} e v_{sen} representam as medições feitas na placa por um osciloscópio, enquanto \hat{v}_{cos} e \hat{v}_{sen} as curvas simuladas. Os gráficos no domínio da frequência foram obtidos via algoritmo FFT em Python.

ocorre na primeira medição, com uma diferença de 4,25% em relação aos valores medidos e simulados de v_{sen} , e 10,70% para os valores de v_{cos} . A diferença entre os valores medidos e simulados permanece em torno de 20% nas demais medições.

A Fig. 9 mostra a relação entre a frequência f_0 do oscilador e a variação do potenciômetro R_{V1} . Esse gráfico apresenta as frequências medidas, com a variação do potenciômetro em incrementos de 10%. Adicionalmente, foram computados os valores estimados de frequência para os mesmos ajustes de resistência, utilizando o modelo (6)–(12). É possível observar que existe uma diferença entre as frequências, com um erro percentual médio de 3,32%, calculada pela razão entre o valor estimado e o valor real

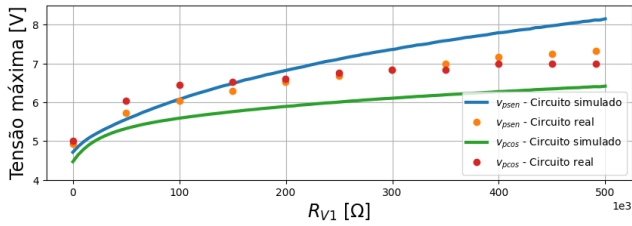


Figura 8. Amplitude de v_{Psen} e v_{Pcos} em relação ao resistor R_{V1} . As curvas em azul e verde indicam, respectivamente, os valores máximos de v_{sen} e v_{cos} do modelo em relação ao tempo, enquanto os pontos vermelhos e laranjas indicam os valores medidos.

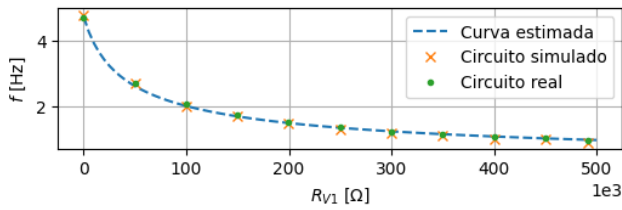


Figura 9. Comparação das frequências do oscilador em função de R_{V1} : curva estimada pela equação (2) (linha azul), medições experimentais (pontos verdes) e frequências obtidas pelo modelo (marcações laranjas), feitos em incrementos de 50 k Ω .

de R_{V1} nas medições. Essa diferença percentual chega no máximo 8,16% para valor máximo de resistência.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho descreveu o projeto de um oscilador de quadratura com frequência ajustável, seu modelo não-linear e sua validação experimental. O comportamento qualitativo do circuito foi bem semelhante ao modelo não-linear obtido. Na avaliação quantitativa, as frequências produzidas pelo modelo e experimentos foram semelhantes, com erro percentual médio na ordem de 3%, com erro máximo de 8,16% para a menor frequência ajustada. Com relação à amplitude dos sinais, foram observadas diferenças mais expressivas, entorno de 20%. Conjectura-se que tais discrepâncias podem ser explicadas por imprecisões na determinação dos componentes e pela simplicidade do modelo do componente não-linear, em que o diodo foi modelado como chave ideal.

Apesar das diferenças observadas, nota-se maior aderência do modelo ao circuito na determinação da frequência do que na amplitude. Este bom desempenho do modelo com relação à frequência é uma das partes mais relevantes do projeto, uma vez que o modelo de Kuramoto limita-se à descrição da dinâmica da fase, determinada por sua frequência angular. Neste sentido, os resultados obtidos mostraram a adequação do circuito para aplicação no contexto de redes complexas.

Como possíveis direções futuras, para o refinamento do modelo, pode-se incluir um modelo mais sofisticado da parte não-linear do circuito (limitador de tensão) utilizando as equações do diodo. Além disso, é importante comparar o modelo proposto com o modelo de Kuramoto, para conhecer melhor suas potencialidades e fragilidades

em aplicações de sincronismo no contexto de redes complexas. Nesse âmbito, é importante explorar as melhores formas de acoplamento entre osciladores, investigação que está atualmente em curso.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao professor Helbert de Sá, pelo apoio no desenvolvimento das placas eletrônicas, o apoio do IFMG, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (APQ-00781-21) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (409487/2021-0).

REFERÊNCIAS

- Bick, C., Panaggio, M.J., and Martens, E.A. (2018). Chaos in Kuramoto oscillator networks. *Chaos*, 28(7). doi:10.1063/1.5041444. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.5041444>.
- Dörfler, F., Chertkov, M., and Bullo, F. (2013). Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(6), 2005–2010.
- English, L.Q., Mertens, D., Abdoukary, S., Fritz, C.B., Skowronski, K., and Kevrekidis, P. (2016). Emergence and analysis of kuramoto-sakaguchi-like models as an effective description for the dynamics of coupled wien-bridge oscillators. *Physical Review E*, 94(6), 062212.
- English, L.Q., Zeng, Z., and Mertens, D. (2015). Experimental study of synchronization of coupled electrical self-oscillators and comparison to the sakaguchi-kuramoto model. *Physical Review E*, 92(5), 052912.
- Graeme, J., Tobey, G., and Huelsman, L. (1971). *Operational Amplifiers: Design and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, 39.
- Montanari, A.N., Freitas, L., Torres, L.A., and Aguirre, L.A. (2019). Phase synchronization analysis of bridge oscillators between clustered networks. *Nonlinear Dynamics*, 97, 2399–2411.
- Ódor, G. and Kelling, J. (2019). Critical synchronization dynamics of the kuramoto model on connectome and small world graphs. *Scientific reports*, 9(1), 19621.
- Rodrigues, F.A., Peron, T.K.D., Ji, P., and Kurths, J. (2016). The kuramoto model in complex networks. *Physics Reports*, 610, 1–98.
- Sedra, A. and Smith, K. (2014). *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, New York.
- Temirbayev, A.A., Nalibayev, Y.D., Zhanabaev, Z.Z., Ponomarenko, V.I., and Rosenblum, M. (2013). Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study. *Physical Review E*, 87(6), 062917.