

# Controle por Modos Deslizantes Adaptativo *Event-Triggered* para Sistemas Nebulosos Tipo-2 Intervalares

Rodrigo Possidônio Noronha \* Ginalber Luiz de Oliveira Serra \*\*

\* Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, São Luís, CEP: 65001-970,  
Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail:  
rodrigo.pn@discente.ufma.br).

\*\* Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, CEP: 65030-005,  
Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br).

---

**Abstract:** In this paper, we propose an event-triggered adaptive sliding mode control method for a class of nonlinear dynamical systems. The nonlinear dynamical system is defined in interval type-2 fuzzy regions. We consider the case where the external disturbance has unknown upper bound, such that the switching gain is adapted, without overestimation, according to the estimate of the upper bound of the external disturbance. In addition to the proof of convergence in finite time of the sliding trajectory, independently if the instant is event-triggered or not, to the restriction that defines the practical sliding mode region and of the stability of the system in the practical sense, i.e. ultimately uniformly bounded, we proved that the control method is free of Zeno effect. Moreover, we define the practical sliding mode region independently of prior knowledge of the external disturbance. Finally, computational simulation results illustrate the effectiveness of the proposed control method.

**Resumo:** Neste artigo, propomos um método de controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered* para uma classe de sistemas dinâmicos não lineares. O sistema dinâmico não linear é definido em regiões nebulosas tipo-2 intervalares. Consideramos o caso em que a perturbação externa possui limite superior desconhecido, tal que o ganho de chaveamento é adaptado, sem sobrestimação, de acordo com a estimativa do limite superior da perturbação externa. Além da prova de convergência em tempo finito da trajetória deslizante, independente se o instante é de *event-triggered* ou não, à restrição que define a região de modo deslizante prático e da estabilidade do sistema no sentido prático, i.e., finalmente uniformemente limitada, provamos que o método de controle é livre de efeito Zeno. Além disso, definimos a região de modo deslizante prático independentemente do conhecimento prévio da perturbação externa. Por fim, os resultados de simulação computacional ilustram a eficácia do método de controle proposto.

**Keywords:** Adaptive Control; Discontinuous Systems; Event-Triggered Control; Fuzzy Systems; Sliding Mode Control.

**Palavras-chaves:** Controle Adaptativo; Controle por Modos Deslizantes; Controle *Event-Triggered*; Sistemas Descontínuos; Sistemas Nebulosos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC) é um método de controle não linear cujo objetivo é forçar a trajetória de estados a se mover na região de modo deslizante através de uma função de controle descontínua definida por uma estrutura variável (Drakunov and Utkin, 1992). Para garantir a convergência da trajetória de estados à região de modo deslizante, com respeito aos métodos de controle por modos deslizantes de primeira ordem (*First Order Sliding Mode Control* – FOSMC), o ganho de chaveamento da entrada de controle descontínua deve ser maior do que o limite superior da

perturbação externa (Obeid et al., 2018). Contudo, supor que o limite superior da perturbação externa é constante ou até mesmo conhecido é bastante restritivo para certas classes de sistemas dinâmicos. Por outro lado, apenas escolher o ganho de chaveamento suficientemente grande pode implicar no aumento do *chattering*, implicando na deterioração da convergência da trajetória de estados à região de modo deslizante (Shtessel et al., 2012; Mercado-Uribe and Moreno, 2020).

Nesse sentido, a estratégia mais pertinente é sintetizar o ganho de chaveamento de forma adaptativa. Como exemplo, em Roy et al. (2020) foi proposto o FOSMC adaptativo para sistemas de Euler-Lagrange, em que é considerado que o ganho de chaveamento adaptativo pode ser incrementado ou decrementado. Outras estratégias para o FOSMC consideram apenas o incremento do ganho de

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMA, Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão.

chaveamento adaptativo, como citado em (Obeid et al., 2018). Porém, para manter o sistema em modo deslizante, essas abordagens realizam a sobrestimação do ganho de chaveamento adaptativo. Já em Oliveira et al. (2016), foi proposta uma abordagem baseada no método de controle equivalente. Sem a sobrestimação do ganho de chaveamento adaptativo, em Obeid et al. (2018) foi proposto o FOSMC adaptativo baseado em função de barreira. Em Rodrigues et al. (2022), foi proposto o FOSMC adaptativo por realimentação de saída baseado em funções de barreira e de monitoração.

Para obtenção de modos deslizantes ideal, uma das restrições é que durante um intervalo de tempo finito ocorram infinitas descontinuidades, implicando que a entrada de controle por modos deslizantes seja continuamente computada (Levant, 1993). Por outro lado, computar a entrada de controle de forma contínua pode não ser necessário quando não há mudanças significativas nas propriedades dinâmicas do sistema, o que implica em uma melhor utilização dos recursos computacionais e energéticos disponíveis (Behera et al., 2018). Nesse sentido, é interessante que a entrada de controle seja computada de forma aperiódica, apenas quando a evolução temporal da trajetória de estados satisfaça uma certa condição/evento, sendo denominada entrada de controle *event-triggered*. Porém, devido ao cômputo aperiódico, métodos de SMC *event-triggered* implicam na obtenção de modos deslizantes apenas em uma vizinhança da região de modo deslizante, i.e., na obtenção de modos deslizantes prático (Mustafa et al., 2019).

Sistemas nebulosos formam uma classe de sistemas dinâmicos definidos em regiões compactas que são sobrepostas, denominadas regiões nebulosas. Contudo, se a definição da região nebulosa é incerta, conjuntos nebulosos do tipo-1 podem não capturar com eficiência a evolução temporal da trajetória de estados. Nesse sentido, regiões nebulosas do tipo-2 superaram esse problema e têm mostrado melhor desempenho do que do tipo-1 (Zhao et al., 2019). Nesse artigo, restringimos a nossa atenção para a teoria de FOSMC. De acordo com o levantamento bibliográfico realizado, embora exista uma quantidade razoável de métodos de FOSMC adaptativo *event-triggered* (Incremona and Ferrara, 2016), identificamos uma quantidade mínima de métodos para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares. Dessa forma, nesse artigo propomos um método de controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered* para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares. As principais contribuições desse método são destacadas a seguir:

- A adaptação do ganho de chaveamento é realizada sem sobrestimação e com convergência garantida no instante de alcance à região de modo deslizante prático;
- A convergência da trajetória deslizante à restrição que define a região de modo deslizante prático ocorre em tempo finito independente se o instante é de *event-triggered* ou não;
- A definição da região de modo deslizante prático é independente do conhecimento prévio da perturbação externa;
- O sistema em modo deslizante prático é estável no sentido prático, i.e., é finalmente uniformemente limitado;

- Na formulação do problema para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares consideramos matrizes de entrada diferentes;
- O método de controle é livre de efeito Zeno.

Organizamos o artigo da seguinte forma: a formulação do problema é apresentada na Seção 2; os resultados principais desse artigo são apresentados na Seção 3; a simulação computacional para verificação da eficácia do método proposto é apresentada na Seção 4; e na Seção 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema dinâmico não linear definido por um sistema nebuloso tipo-2 intervalar com a seguinte descrição lógica

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ SE } f_1(x_1(t)) \in M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } f_\Theta(x_\Theta(t)) \in M_\Theta^i, \\ \text{ ENTÃO } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) + d(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}$  denota a entrada de controle.  $M_\alpha^i$  denota o  $\alpha$ -ésimo conjunto nebuloso da  $i$ -ésima regra,  $f_\alpha(x_\alpha(t))$  denota a premissa,  $\alpha \in \{1, 2, \dots, \Theta\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , onde  $\Theta$  denota o número de conjuntos nebulosos tipos-2 intervalares e  $r$  denota o número de regras.  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$  denotam as matrizes constantes e conhecidas que definem o  $i$ -ésimo subsistema.  $d(t) \in \mathbb{R}$  denota a perturbação externa. O valor mapeado pela função grau de pertinência de ativação normalizado pertence ao seguinte intervalo

$$\omega_i(\mathbf{x}(t)) \in [\underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)), \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t))], \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\prod_{\alpha=1}^{\Theta} \underline{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{i=1}^r \prod_{\alpha=1}^{\Theta} \underline{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))} \geq 0 \\ \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\prod_{\alpha=1}^{\Theta} \bar{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{i=1}^r \prod_{\alpha=1}^{\Theta} \bar{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))} \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

e as funções de pertinências inferiores e superiores são definidas por  $\underline{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))$  e  $\bar{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))$ , respectivamente. Por definição,  $\bar{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t))) \geq \underline{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))$  implicando que  $\bar{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t))) \geq \underline{\eta}_{M_\alpha^i}(f_i(\mathbf{x}(t)))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  e  $t \geq 0$ . O grau de pertinência de ativação normalizado satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} \omega_i(\mathbf{x}(t)) = \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) \underline{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) + \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) \bar{\omega}_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \\ 0 \leq \underline{v}_i(\mathbf{x}(t)), \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) \leq 1, \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\underline{v}_i(\mathbf{x}(t)) + \bar{v}_i(\mathbf{x}(t)) = 1,$$

onde  $\underline{v}_i(\mathbf{x}(t))$  e  $\bar{v}_i(\mathbf{x}(t))$  são os parâmetros da combinação convexa entre os graus de pertinências inferiores e superiores normalizados,  $\underline{v}_i(\mathbf{x}(t))$  e  $\bar{v}_i(\mathbf{x}(t))$ , respectivamente.

Sendo assim, o sistema dinâmico é definido pela seguinte combinação convexa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) + d(t)). \quad (5)$$

Utilizaremos as seguintes considerações em todo o artigo.

**C1.** O subsistema definido pelo par de matrizes  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , é controlável.

**C2.** A perturbação externa  $d(t)$  é limitada para todo tempo, i.e.,  $\sup_{t \geq 0} |d(t)| \leq \varrho$ , mas  $\varrho$  é desconhecido.

**C3.** A perturbação externa  $d(t)$  possui todas as derivadas necessárias para a formulação do problema.

**C4.** A matriz  $\mathbf{CB}_i$  é sempre invertível.

**C5.** Assumimos que os subsistemas não compartilham a mesma matriz de entrada  $\mathbf{B}_i$ .

**C6.** Assumimos que mediante uma transformação de congruência  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$  (Edwards and Spurgeon, 1998) podemos transformar o sistema (5) na forma regular, definido por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) (\tilde{\mathbf{A}}_{i11} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \tilde{x}_2(t)) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{x}(t)) (\tilde{\mathbf{A}}_{i21} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{A}_{i22} \tilde{x}_2(t) \\ &\quad + \tilde{B}_{i2} u(t) + d(t)),\end{aligned}\quad (6)$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\tilde{x}_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{i11} & \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{i21} & \tilde{A}_{i22} \end{bmatrix}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{B}_{i2} \end{bmatrix}$ .  $\tilde{\mathbf{A}}_{i11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_{i12} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_{i21} \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$ ,  $\tilde{A}_{i22} \in \mathbb{R}$ , e  $\tilde{B}_{i2} \in \mathbb{R}$ .

A região de modos deslizantes é definida por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : s(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = 0\}, \quad (7)$$

onde  $s(t)$  define a função deslizante  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

**Definição 1** (Modo Deslizante Ideal) (Levant, 1993). O sistema (5) é dito estar em modo deslizante ideal se as trajetórias de estados alcançam  $\mathcal{S}$  em tempo finito e permanecem nela para todo tempo posterior.

A função de controle que força o modo deslizante é denominada função de controle por modos deslizantes e é definida por

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\mathbf{CB}_i)^{-1} (\mathbf{CA}_i \mathbf{x}(t) + K \text{sign}(s(t))), \quad (8)$$

tal que  $s(t)\dot{s}(t) \leq -\eta|s(t)|$  para  $K \geq \sup_{t \geq 0} |d(t)| + \eta$ . Essa condição garante o modo deslizante em tempo finito em  $\mathcal{S}$ . Por simplicidade de notação, no restante do artigo denotaremos  $\omega_i(t) = \omega_i(\mathbf{x}(t))$ .

**Comentário 1.** É importante notar que, quando em modo deslizante, o sistema (5) é descontínuo devido à função de controle (8) ser descontínua em  $s(t) = 0$ . Assim, as soluções do sistema (5), quando em modo deslizante, são entendidas no sentido de Filippov (Filippov, 1988).

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Aqui apresentamos os resultados principais do artigo. A abordagem de controle *event-triggered* tem como objetivo computar a entrada de controle (8) de forma aperiódica apenas quando uma certa condição, denominada *evento*, é satisfeita. Para garantir que o objetivo de controle seja satisfeito, essa condição é inserida na formulação do problema de controle. É importante notar que a condição de evento é verificada para todo tempo. A sequência de instantes de *event-triggered* é denotada por  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

Definimos o tempo entre instantes consecutivos de *event-triggered*, i.e., o tempo entre cálculos da entrada de controle (8) por  $T_k := t_{k+1} - t_k$ . Por definição, a sequência  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$  é dita ser livre do efeito Zeno se existe um  $\psi > 0$  tal que  $T_k > \psi$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Nesse sentido, a função de controle por modos deslizantes (8) adaptativo *event-triggered* é definida por

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \omega_i(t_k) (\mathbf{CB}_i)^{-1} (\mathbf{CA}_i \mathbf{x}(t_k) + K(t_k) \text{sign}(s(t_k))), \quad (9)$$

onde  $K(t_k)$  denota o ganho de chaveamento adaptativo e  $\hat{\varrho}(t_k)$  denota a estimativa do limite superior da perturbação externa para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . É importante notar que no instante de *event-triggered*  $u(t) = u(t_k)$ . Definimos a função erro de monitoração por  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$ , para todo  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . A entrada de controle (9) é computada baseada na sequência de instantes de *event-triggered*,  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ , que é definida por

$$t_{k+1} = \inf \left\{ t > t_k : \|\mathbf{e}(t)\| \geq \frac{\bar{\eta} - \eta}{\|\bar{\mathbf{A}}\|} \right\}, \quad (10)$$

onde  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  são constantes escalares positivas dadas satisfazendo  $\eta < \bar{\eta}$ .

Por utilizar uma abordagem *event-triggered*, somente é possível obter um modo deslizante real, i.e., um modo praticamente deslizante, uma vez que a entrada de controle não é computada continuamente durante um intervalo de tempo finito. Assim, é necessário definir modo deslizante prático.

**Definição 2** (Modo Deslizante Prático) (Behera et al., 2018). O sistema (5) é dito estar em modo deslizante prático se dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $t_1 \geq 0$  tal que as trajetórias deslizantes  $s(t)$  permanecem limitadas na vizinhança de raio  $\epsilon$  da região  $s(t) = 0$  para todo  $t \geq t_1$ , i.e.,  $|s(t)| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq t_1$ . Como caso particular, quando  $\epsilon = 0$  o sistema (5) é dito estar em modo deslizante ideal.

**Comentário 2.** É consideração comum em problemas de controle por modos deslizante para sistemas nebulosos que os subsistemas compartilhem a mesma matriz de entrada  $\mathbf{B}_i$ , i.e.,  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$  (Zhao et al., 2019). Porém, essa consideração é bastante restritiva, de tal forma que nesse artigo consideramos matrizes de entrada diferentes.

No próximo teorema apresentaremos uma condição suficiente para a existência de modo deslizante prático no sistema (5) com a função de controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered* (9).

**Teorema 1.** Considere o sistema (5) com a entrada de controle (9) computada baseada em uma sequência de instantes de *event-triggered* (10). Assuma que existam constantes escalares positivas dadas  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  com  $\eta < \bar{\eta}$  tal que a seguinte condição é satisfeita

$$\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| < \bar{\eta} - \eta, \quad (11)$$

para todo  $t \geq 0$ . Então, o modo deslizante prático ocorrerá na região

$$\bar{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : |s(t)| \leq \|\mathbf{C}\| \frac{(\bar{\eta} - \eta)}{\|\bar{\mathbf{A}}\|} \right\}, \quad (12)$$

onde  $\|\bar{\mathbf{A}}\| = \|\mathbf{C}\| \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\|$  e o ganho de chaveamento adaptativo é definido por

$$K(t_k) = \bar{\eta} + \hat{\varrho}(t_k), \quad (13)$$

tal que a equação diferencial para estimação do limite superior da perturbação externa é definida por

$$\dot{\hat{\varrho}}(t) = \begin{cases} \gamma |s(t)| & \text{se } |s(t)| > \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{e}(t)\| \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (14)$$

onde  $\gamma$  é uma constante escalar positiva dada e a função erro de estimação é definida por  $\tilde{\varrho}(t) = \hat{\varrho}(t) - \bar{\varrho}$ .

**Prova.** Considere a função de Lyapunov definida por

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2(t) + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\varrho}^2(t), \quad (15)$$

para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Diferenciando  $V$  ao longo das trajetórias de (5), obtemos a definição de  $\dot{V}$  dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s(t)\dot{s}(t) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t) \\ &= s(t)\mathbf{C} \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) + d(t)] + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo a entrada de controle (9) em (16), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &< |s(t)| \|\mathbf{C}\| \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}(t)\| \\ &\quad + |s(t)| \|\mathbf{C}\| \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}(t_k)\| \\ &\quad - K(t_k) s(t) \text{sign}(s(t_k)) + |s(t)| \|\mathbf{C}\| |d(t)| + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

por considerar  $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{A}_i < \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i$ ,  $\sum_{i=1}^r \omega_i(t_k) \mathbf{A}_i < \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i$  e  $\sum_{i=1}^r \omega_i(t) \mathbf{B}_i < \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i$ .

O tamanho da região de modo deslizante prático pode ser definida através do valor máximo do desvio

$$|s(t_k) - s(t)| = \|\mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{e}(t)\|, \quad (18)$$

que é obtido quando  $s(t_k) = 0$ . Através de (18), podemos concluir que  $\text{sign}(s(t)) \neq \text{sign}(s(t_k))$  apenas se  $s(t)$  estiver no interior da região formada pela interseção das duas regiões definidas abaixo

$$\text{R1} = \{\mathbf{x}(t) : s(t) \leq 0, s(t_k) \geq 0, s(t) \geq s(t_k) - \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{e}(t)\|\}$$

$$\text{R2} = \{\mathbf{x}(t) : s(t) \geq 0, s(t_k) \leq 0, s(t) \leq s(t_k) + \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{e}(t)\|\}. \quad (19)$$

**Comentário 3.** Consequentemente, podemos afirmar que  $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$  apenas se  $s(t)$  não estiver no interior da região formada pela interseção das regiões R1 e R2.

Logo, considerando que as trajetórias deslizantes iniciem em uma região onde  $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$ , i.e., o sistema não está em modo deslizante prático, então (17) pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq |s(t)| \|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{x}(t)\| + |s(t)| \|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{x}(t_k)\| \\ &\quad - K(t_k) s(t) \text{sign}(s(t_k)) + |s(t)| |\bar{d}(t)| + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\leq |s(t)| (\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| - K(t_k)) + |s(t)| \bar{\varrho} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t),$$

onde  $\|\mathbf{C}\| \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| = \|\bar{\mathbf{A}}\|$ . Além disso,  $\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{C}\| |d(t)| = \sup_{t \geq 0} |\bar{d}(t)| \leq \bar{\varrho}$ , mas  $\bar{\varrho} \geq \varrho$  é desconhecido.

Uma vez que  $K(t_k) = \bar{\eta} + \hat{\varrho}(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq |s(t)| (\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| - \bar{\eta}) - |s(t)| \hat{\varrho} + |s(t)| \bar{\varrho} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t)\dot{\hat{\varrho}}(t) \\ &= |s(t)| (\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| - \bar{\eta}) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\varrho}(t) (\dot{\hat{\varrho}}(t) - \gamma |s(t)|). \end{aligned} \quad (21)$$

De acordo com (10), definimos a condição para ocorrência de *event-triggered* por

$$\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| \geq \bar{\eta} - \eta, \quad (22)$$

e a equação diferencial para estimação do limite superior da perturbação externa da seguinte forma

$$\dot{\hat{\varrho}}(t) = \begin{cases} \gamma |s(t)| & \text{se } |s(t)| > \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{e}(t)\| = \|\mathbf{C}\| \frac{\bar{\eta} - \eta}{\|\bar{\mathbf{A}}\|} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Considerando que o sistema não está em modo deslizante prático, i.e., implicando que  $\text{sign}(s(t)) = \text{sign}(s(t_k))$ , de acordo com (18) e (23), temos que

$$\dot{V}(t) \leq |s(t)| (\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| - \bar{\eta}). \quad (24)$$

Supondo que no instante  $t$  a condição de *event-triggered* (22) seja satisfeita, nesse caso, através de (24), temos que  $\dot{V}(t) \leq -\eta |s(t)|$ , pois  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t) = 0$ , e assim as trajetórias deslizantes  $s(t)$  convergirão ao desvio máximo da região (18), implicando em modo deslizante prático. Por outro lado, para  $t \in (t_k, t_{k+1})$ , i.e., quando não há instante de *event-triggered*, normalmente não haveria garantia de convergência. Porém, (24) nos fornece que há garantia de convergência das trajetórias deslizantes  $s(t)$  ao desvio máximo da região (18), i.e., de acordo com a condição para não ocorrência de *event-triggered* (11), temos

$$\dot{V}(t) \leq -\eta |s(t)|, \quad (25)$$

implicando em modo deslizante prático, e assim concluindo a prova.

**Comentário 4.** A garantia de convergência à região de modo deslizante prático, independente se há ou não instante de *event-triggered*, é sempre em tempo finito.

**Comentário 5.** Quando o sistema está em modo deslizante prático, de acordo com (23), obtemos que  $\dot{\hat{\varrho}}(t) = 0$ , o que nos fornece dois importantes resultados: (1) não ocorre a sobrestimação do ganho de chaveamento adaptativo na região de modo deslizante prático; (2) de acordo com (18) e (19), o sistema sempre permanecerá em modo deslizante prático após as trajetórias deslizantes  $s(t)$  entrarem no desvio máximo da região (18).

O seguinte teorema nos garante que o método de controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered* proposto é livre de efeito Zeno.

**Teorema 2.** Considere a condição de ocorrência de *event-triggered* (22) para cômputo da entrada de controle (9), então, é garantido que o mínimo tempo entre instantes consecutivos de *event-triggered* é definido pela seguinte desigualdade

$$T_k \geq \frac{1}{\tau} \ln \left( 1 + \frac{\tau(\bar{\eta} - \eta) \|\sum_{i=1}^r \mathbf{C}\mathbf{A}_i\|^{-1}}{\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta} \right). \quad (26)$$

**Prova.**

Iremos partir das relações obtidas para a prova de convergência das trajetórias deslizantes à região  $s(t) \leq \|\mathbf{C}\| \frac{\eta - \bar{\eta}}{\|\bar{\mathbf{A}}\|}$ . Considere o conjunto  $\Gamma = \{t : \|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| = 0\}$ .

Então, para  $t \in [t_k, t_{k_1}) - \Gamma$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\| &\leq \|\dot{\mathbf{e}}(t)\| = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{e}(t)\| \\ &+ \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}(t_k)\| + \sum_{i=1}^r \|\mathbf{B}_i(\mathbf{C}\mathbf{B}_i)^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{A}_i)\mathbf{x}(t_k)\| \\ &+ \sum_{i=1}^r \|\mathbf{B}_i(\mathbf{C}\mathbf{B}_i)^{-1}K(t_k)\| + \varrho(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Fazendo  $\tau = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\|$ ,  $\beta = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{B}_i(\mathbf{C}\mathbf{B}_i)^{-1}K(t_k)\| + \varrho(t)$ , e  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}(t_k)\| + \sum_{i=1}^r \|\mathbf{B}_i(\mathbf{C}\mathbf{B}_i)^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{A}_i)\mathbf{x}(t_k)\|$ , logo temos

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\| \leq \tau \|\mathbf{e}(t)\| + \rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta. \quad (28)$$

Solucionando (28) pelo lema da comparação (Khalil, 2002), temos

$$\|\mathbf{e}(t)\| = \frac{\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta}{\tau} \left( e^{\tau(t-t_k)} - 1 \right), \quad (29)$$

com condição inicial  $\mathbf{e}(t_k) = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ , onde  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .

Notando que o cômputo da entrada de controle ocorrerá somente quando  $\|\bar{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{e}(t)\| = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{e}(t)\| \geq \bar{\eta} - \eta$ , e que o próximo instante de *event-triggered* é definido por

$$t_{k+1} = \inf \left\{ t > t_k : \|\mathbf{e}(t)\| \geq \frac{\bar{\eta} - \eta}{\sum_{i=1}^r \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{A}_i\|} \right\}, \quad (30)$$

então usando as duas últimas relações acima e que  $\mathbf{e}_1(t) := \mathbf{C} \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{e}(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\eta} - \eta &\leq \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{C}\mathbf{A}_i \right\| \frac{\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta}{\tau} (e^{\tau T_k} - 1) \\ T_k &\geq \frac{1}{\tau} \ln \left( 1 + \frac{\tau(\bar{\eta} - \eta) \left\| \sum_{i=1}^r \mathbf{C}\mathbf{A}_i \right\|^{-1}}{\rho(\|\mathbf{x}(t_k)\|) + \beta} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

assim concluindo a prova.

O próximo teorema garante que o movimento deslizante prático é estável no sentido prático, i.e, é finalmente uniformemente limitado. Durante o modo deslizante prático, temos que

$$|s(t)| \leq \|\mathbf{C}\| \frac{(\bar{\eta} - \eta)}{\|\bar{\mathbf{A}}\|}, \quad (32)$$

considerando a forma regular do sistema (5), em modo deslizante prático temos que

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \leq -\mathbf{C}_1 \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \|\mathbf{C}\| \frac{(\bar{\eta} - \eta)}{\|\bar{\mathbf{A}}\|}, \quad (33)$$

onde  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2]$ , com  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$  e  $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}$ . Substituindo (33) na equação de estados de  $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$  em (6), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) &\leq \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\tilde{\mathbf{A}}_{i11} - \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{C}_1) \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ &+ \|\mathbf{C}\| \frac{(\bar{\eta} - \eta)}{\|\bar{\mathbf{A}}\|} \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12}, \end{aligned} \quad (34)$$

onde  $\|\bar{\mathbf{A}}\| = \sum_{i=1}^r \|\tilde{\mathbf{A}}_i\|$ .

Dessa forma, a análise de estabilidade será realizada para o sistema (34).

**Teorema 3.** O sistema (34) é estável no sentido prático, i.e, finamente limitado, se as trajetórias de estados em modo deslizante prático são limitadas à região definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_1(t) : \lambda\{\mathbf{Q}\} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq 2\delta \left\| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \right\| \right\}, \quad (35)$$

onde  $\delta = \|\mathbf{C}\|(\bar{\eta} - \eta) \|\bar{\mathbf{A}}\|^{-1}$ ,  $\lambda\{\mathbf{Q}\}$  denota o menor autovalor da matriz  $\mathbf{Q}$ , e  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas definidas positivas.

**Prova.** Consideramos que o sistema está em modo deslizante prático. Então, definimos a função de Lyapunov da seguinte forma

$$V(t) = \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t). \quad (36)$$

Diferenciando  $V$  ao longo das trajetórias de (34), obtemos a definição de  $\dot{V}$  dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t) \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) \\ &\leq \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\tilde{\mathbf{A}}_{i11} - \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{C}_1) \right) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ &+ \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t) \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^r \omega_i(t) (\tilde{\mathbf{A}}_{i11} - \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{C}_1) \right) \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ &+ 2\delta \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t), \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $\tilde{\mathbf{A}}_{cl} = (\tilde{\mathbf{A}}_{i11} - \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{C}_1)$  é Hurwitz estável. De acordo com a equação de Lyapunov, existe uma matriz  $\mathbf{0} < \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  tal que

$$\tilde{\mathbf{A}}_{cl}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_{cl} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (38)$$

é satisfeita. Dessa forma, (37) é equivalente a

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{\mathbf{x}}_1^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + 2\delta \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_1(t). \quad (39)$$

Da desigualdade de Rayleigh, para qualquer matriz  $\mathbf{Q}$  simétrica definida positiva, temos

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda\{\mathbf{Q}\} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|^2 + 2\delta \left\| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \right\| \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|, \quad (40)$$

que é equivalente a

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda\{\mathbf{Q}\} (\|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| - 2\delta(\lambda\{\mathbf{Q}\})^{-1} \Lambda) \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\|, \quad (41)$$

onde  $\lambda\{\mathbf{Q}\}$  denota o menor autovalor da matriz  $\mathbf{Q}$  e  $\Lambda = \left\| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \right\|$ . Dessa forma, (41) é equivalente a

$$\lambda\{\mathbf{Q}\} \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t)\| \leq 2\delta \left\| \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \tilde{\mathbf{A}}_{i12} \mathbf{P} \right\|, \quad (42)$$

assim concluindo a prova.

#### 4. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Nesta seção, apresentaremos os resultados das simulações computacionais do método de controle proposto para verificação de sua eficácia. Considere um sistema nebuloso

tipo-2 intervalar definido pelas seguintes matrizes obtidas de Li et al. (2016)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0,6 & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1,8 & 0 \\ 0,8 & -0,7 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1,4 & 0 \\ 0,6 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -0,6 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 2,2 \\ -0,4 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 1,7 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (43)$$

e as funções graus de pertinências superiores e inferiores normalizadas são definidas por  $\underline{\omega}_1(x_1(t)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(t)+8)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_1(x_1(t)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(t)+6)})^{-1}$ ,  $\underline{\omega}_3(x_1(t)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(t)-4)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_3(x_1(t)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(t)-2)})^{-1}$ ,  $\underline{\omega}_2(x_1(t)) = 1 - \bar{\omega}_1(x_1(t)) - \bar{\omega}_3(x_1(t))$  e  $\bar{\omega}_2(x_1(t)) = 1 - \underline{\omega}_1(x_1(t)) - \underline{\omega}_3(x_1(t))$ . As funções de parâmetros da combinação convexa entre os graus de pertinências superiores e inferiores normalizados são definidas por  $\bar{v}_1(x_1(t)) = \text{sen}^2(x_1(t))$ ,  $v_1(x_1(t)) = 1 - \bar{v}_1(x_1(t))$ ,  $\bar{v}_3(x_1(t)) = \text{cos}^2(x_1(t))$  e  $v_3(x_1(t)) = 1 - \bar{v}_3(x_1(t))$ . Então, as funções graus de pertinências de ativação normalizados são definidas por  $\omega_1(x_1(t)) = \bar{\omega}_1(x_1(t))(1 - \bar{v}_1(x_1(t))) + \bar{\omega}_1(x_1(t))\bar{v}_1(x_1(t))$ ,  $\omega_3(x_1(t)) = \bar{\omega}_3(x_1(t))(1 - \bar{v}_3(x_1(t))) + \bar{\omega}_3(x_1(t))\bar{v}_3(x_1(t))$  e  $\omega_2(x_1(t)) = 1 - \omega_1(x_1(t)) - \omega_3(x_1(t))$ . A função deslizante foi definida por  $s(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$  com  $\mathbf{C} = [1, 5435 \ 1]$ . O parâmetro  $\gamma$  em (23) foi definido por 1 e a condição inicial da estimativa da perturbação externa  $\hat{\rho}(0)$  foi definido por 0, 1. Os parâmetros  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  foram definidos por 0, 08 e 0, 2, respectivamente. A condição inicial do vetor de estados foi definida por  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$ . A função de perturbação externa foi definida por  $d(t) = \text{sen}(t)$ .

Mostramos a evolução temporal da trajetória deslizante na Figura 1. Podemos notar que durante o início da fase de alcance, o ganho de chaveamento adaptativo é insuficiente para forçar a convergência da trajetória deslizante à região definida por  $s(t) \leq 0,0213$ , em que o limite superior dessa região é o desvio máximo da região definida em (18) por  $\|\mathbf{C}\|(\bar{\eta} - \eta)\|\bar{\mathbf{A}}\|^{-1}$ . À medida que a estimativa do limite superior da perturbação externa é incrementada, o ganho de chaveamento adaptativo também é incrementado, assim forçando a convergência da trajetória deslizante à  $s(t) = 0$ . Uma vez que o sistema é descontínuo na região de modo deslizante ideal, após a trajetória deslizante convergir à  $s(t) = 0$  a trajetória de estados sai da região de modo deslizante ideal, porém permanece na região de modo deslizante prático, e assim é estável no sentido prático, i.e., finalmente uniformemente limitada, como podemos verificar nas Figuras 2 e 3. Esse movimento característico de modo deslizante permanece durante todo o tempo após a trajetória de estados alcançar a região de modo deslizante ideal. Podemos verificar através da Figura 1 que a convergência da trajetória deslizante à  $s(t) = 0$  ocorre em aproximadamente  $t_1 = 2,55$  s, e para todo  $t \geq t_1$  a trajetória deslizante permanece limitada, i.e.,  $s(t) \leq 0,0213$ , assim implicando que a trajetória de estados permanece em modo deslizante prático.

Na Figura 4 mostramos a evolução temporal da entrada de controle, onde notamos que as discontinuidades iniciam após a convergência da trajetória de estados à região de modo deslizante ideal. É importante notar que após a trajetória de estados convergir para a região de modo deslizante prático ocorre a convergência do ganho de chaveamento adaptativo, como podemos notar na Figura

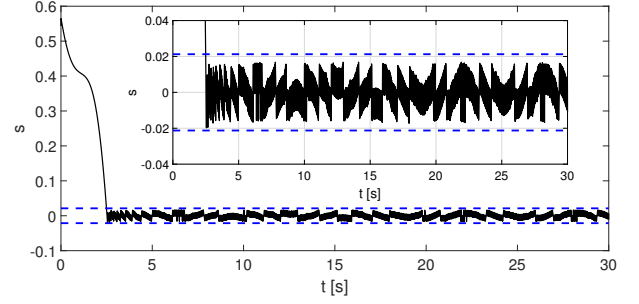


Figura 1. Evolução temporal da trajetória deslizante.

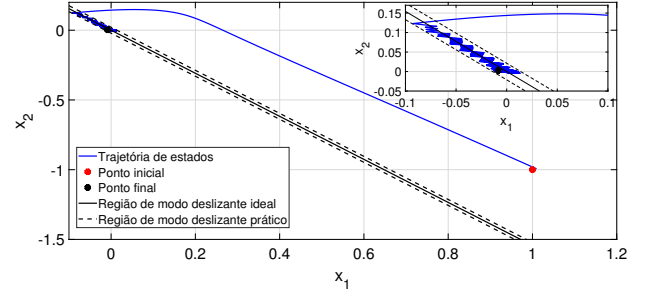


Figura 2. Evolução temporal da trajetória do vetor de estados.

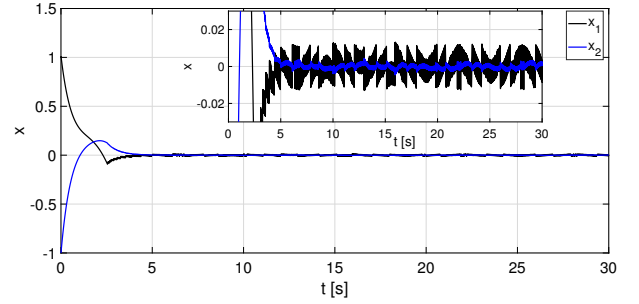


Figura 3. Evolução temporal das trajetórias dos estados.

5. Uma vez que as discontinuidades ocorrem de forma aperiódica, que é devido à entrada de controle ser *event-triggered*, implica que o *chattering* é uma propriedade dinâmica inerente ao problema de controle por modos deslizantes tratado nesse artigo, que pode ser reduzido à medida que o raio da região de modo deslizante prático é reduzido.

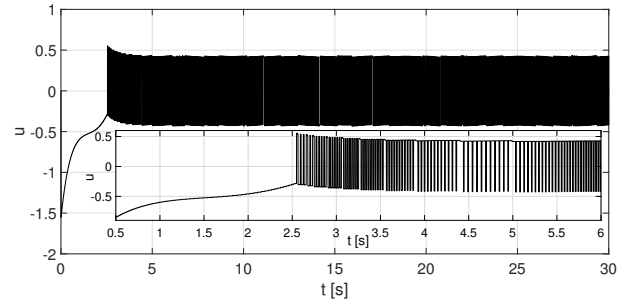


Figura 4. Evolução temporal da entrada de controle.

Uma característica comum em método de controle por modos deslizantes adaptativo é a sobrestimação do ganho

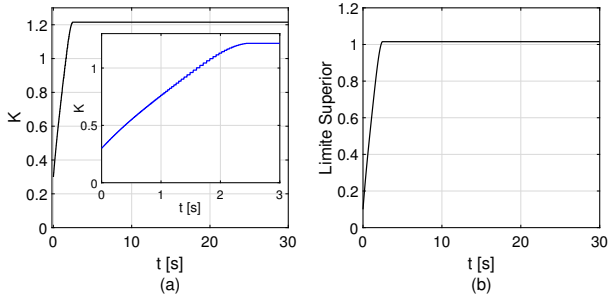


Figura 5. Evolução temporal do ganho de chaveamento adaptativo (a) e da estimativa do limite superior da perturbação externa (b).

de chaveamento adaptativo, com o objetivo de que, após sair dela, a trajetória de estados retorne à região de modo deslizante. No nosso método não há a sobrestimação do ganho de chaveamento adaptativo, uma vez que, após a convergência da trajetória de estados à região de modo deslizante prático, obtemos a convergência do ganho de chaveamento adaptativo por forçar a convergência da estimativa do limite superior da perturbação externa, como definido em (23) e que podemos notar na Figura 5 (a). Na Figura 5 (b), notamos que o valor de convergência da estimativa do limite superior da perturbação externa foi de 1,0152, que é bem próximo do valor máximo mapeado pela função de perturbação externa. Mostramos a evolução temporal do tempo  $T_k$  entre instantes consecutivos de *event-triggered*,  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , na Figura 6, em que notamos que o tempo mínimo e o máximo foi de 0,01 s e 0,057 s, respectivamente. É importante notar que o tamanho de passo que utilizamos para discretizar o sistema foi de 0,001 s, logo o tempo mínimo entre instantes consecutivos de *event-triggered* foi 10 vezes maior do que o tamanho de passo de discretização. Caso reduzíssemos o raio da região de modo deslizante prático, implicaria na redução do valor mínimo e máximo do tempo  $T_k$ .

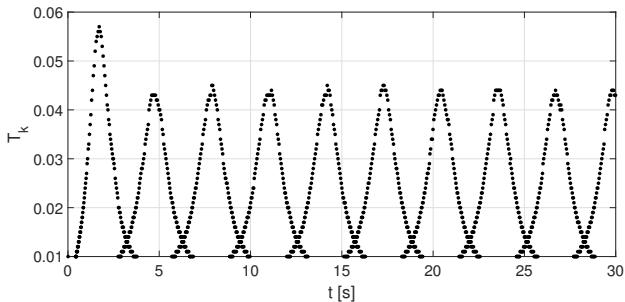


Figura 6. Evolução temporal do tempo  $T_k$ .

## 5. CONCLUSÃO

Nesse artigo, propomos um método de controle por modos deslizantes adaptativo *event-triggered*. O nosso problema de controle foi formulado para um sistema dinâmico definido em regiões nebulosas tipo-2 intervalares. Além de garantirmos a existência do modo deslizante prático e estabilidade do sistema no sentido prático, i.e., finalmente uniformemente limitada, provamos que o nosso método não possui o efeito Zeno. Formulamos a definição da região de modo deslizante prático independentemente do

conhecimento prévio da perturbação externa. Outra característica satisfatória do nosso método é que não ocorre a sobrestimação do ganho de chaveamento adaptativo para manter a trajetória deslizante na região de modo deslizante prático, pois a convergência à região de modo deslizante prático implica na convergência do ganho de chaveamento adaptativo.

## REFERÊNCIAS

- Behera, A.K., Bandyopadhyay, B., and Yu, X. (2018). Periodic event-triggered sliding mode control. *Automatica*, 96, 61–72.
- Drakunov, S.V. and Utkin, V.I. (1992). Sliding mode control in dynamic systems. *International Journal of Control*, 55(4), 1029–1037.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press.
- Filippov, A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- Incremona, G.P. and Ferrara, A. (2016). Adaptive model-based event-triggered sliding mode control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10), 1298–1316.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, volume 115. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 3rd edition.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.
- Li, H., Wang, J., Lam, H.K., Zhou, Q., and Du, H. (2016). Adaptive sliding mode control for interval type-2 fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 46(12), 1654–1663.
- Mercado-Uribe, J.Á. and Moreno, J.A. (2020). Discontinuous integral action for arbitrary relative degree in sliding-mode control. *Automatica*, 118, 109018.
- Mustafa, A., Dhar, N.K., and Verma, N.K. (2019). Event-triggered sliding mode control for trajectory tracking of nonlinear systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(1), 307–314.
- Obeid, H., Fridman, L.M., Laghrouche, S., and Harmouche, M. (2018). Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, 93, 540–544.
- Oliveira, T.R., Cunha, J.P.V., and Hsu, L. (2016). Adaptive sliding mode control for disturbances with unknown bounds. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 59–64. IEEE.
- Rodrigues, V.H.P., Hsu, L., Oliveira, T.R., and Fridman, L. (2022). Adaptive sliding mode control with guaranteed performance based on monitoring and barrier functions. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 36(6), 1252–1271.
- Roy, S., Baldi, S., and Fridman, L. (2020). On adaptive sliding mode control without a priori bounded uncertainty. *Automatica*, 111, 108650.
- Shtessel, Y., Taleb, M., and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.
- Zhao, Y., Wang, J., Yan, F., and Shen, Y. (2019). Adaptive sliding mode fault-tolerant control for type-2 fuzzy systems with distributed delays. *Information Sciences*, 473, 227–238.