

# Emprego do Ajuste Vetorial Complexo na Síntese Racional de Sistemas Representados por Admitâncias<sup>\*</sup>

Alexandre A. Kida<sup>\*</sup> Antonio C. S. Lima<sup>\*\*</sup> Fernando A. Moreira<sup>\*\*\*</sup>  
Debora Microni<sup>\*\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Universidade Federal da Bahia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, BA, e Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, BA (e-mail: alexandre.kida@ifba.edu.br).

<sup>\*\*</sup> Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, RJ (e-mail: acsl@coppe.ufrj.br)

<sup>\*\*\*</sup> Departamento de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Federal da Bahia, BA (e-mail: moreiraf@ufba.br)

<sup>\*\*\*\*</sup> Light SA, RJ, (email: deboram microni@gmail.com)

---

**Abstract:** The pole relocation algorithm known as Vector Fitting (VF) has been proven to be a reliable and accurate approach for frequency domain realization. However, there are some limitations as the need for a second stage to enforce passivity to ensure stable time-domain responses. In this work, it is investigated if an improved response for the synthesis of admittances (scalar or matrices) may be obtained if the assumption of complex conjugate pairs is dismissed. This formulation, known as Complex Vector Fitting (CVF) has been previously considered in the synthesis of Scattering parameters of photonic systems. Four test-cases are considered: two regarding the synthesis of power transformer terminal admittance, one concerning the modeling of a frequency-dependent network equivalent (FDNE), and another focusing on the fitting of a transmission line with frequency-dependent parameters. The results indicated that CVF leads to more accurate results with lesser passivity violations. In fact, there were passivity violations in only two of the test-cases.

**Resumo:** O algoritmo de realocação de polos conhecido como Ajuste Vetorial ou *Vector Fitting* (VF) provou ser uma abordagem confiável e precisa para a realização no domínio da frequência. No entanto, existem algumas limitações como a necessidade de uma segunda etapa para impor a passividade, garantindo, assim, respostas estáveis no domínio do tempo. Este trabalho investiga se a suposição de pares conjugados complexos for desconsiderada, resultaria em uma melhoria na aproximação racional de admitâncias (escalares ou matriciais). Esta formulação, conhecida como Ajuste Vetorial Complexo ou *Complex Vector Fitting* (CVF) foi previamente considerada na síntese de parâmetros de espalhamento de sistemas fotônicos. São considerados quatro casos-teste: dois relacionados à síntese da admitância terminal de transformadores de potência, um envolvendo a modelagem de um equivalente de rede dependente da frequência (FDNE), e outro focado no ajuste de uma linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência. Os resultados indicam que o CVF leva a resultados mais precisos e a menores violações de passividade. De fato, apenas dois dos casos-teste apresentaram violações.

**Keywords:** Complex Vector Fitting; Electromagnetic transients; Frequency-domain model synthesis; Passivity; Vector Fitting.

**Palavras-chaves:** Complex Vector Fitting; Passividade; Síntese de modelos no domínio da frequência; Transitórios Eletromagnéticos; Vector Fitting.

---

## 1. INTRODUÇÃO

As restrições ambientais e a expansão contínua da geração, transmissão, distribuição e consumo de energia elétrica têm levado a um aumento na complexidade dos sistemas de energia elétrica. Isso resulta em topologias mais interconectadas e assimétricas, como o acoplamento de novos circuitos aos existentes em uma mesma torre de transmissão (Lima et al., 2020). Considerar essas dinâmicas nos modelos matemáticos é essencial para garantir

---

<sup>\*</sup> Agrademos o apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), projeto 001; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projetos 404068/2020-0, 400851/2021-0; da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), projeto APQ-03609-17 e do Instituto Nacional de Energia Elétrica (INERGE). O apoio parcial recebido pela Light S.A. também é reconhecido.

a precisão das simulações. No entanto, isso vem com um custo: o aumento da complexidade do modelo e o esforço computacional necessário para sua simulação.

Para superar essa limitação, é comum dividir a região de interesse em duas partes: uma onde há uma representação detalhada da rede e outra onde é utilizado um equivalente de rede dependente da frequência (FDNE - *Frequency Dependent Network Equivalent*). Este último pode ser aproximado por um equivalente de Norton e sua matriz admitância pode ser aproximada por funções de transferências racionais (Gustavsen, 2002; Noda, 2005; Ubolli and Gustavsen, 2010; Grivet-Talocia and Gustavsen, 2015).

O *Vector Fitting* (VF) (Semlyen, 1999; Gustavsen, 2006; Deschrijver et al., 2008) é um *framework* amplamente utilizado no ajuste de funções racionais à resposta em frequência. Seu sucesso pode ser atribuído a diversas características, tais como sua eficiência computacional, alta precisão, formulação simplificada, versatilidade de aplicação e ser um software de código aberto (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2015).

Já o *Complex Vector Fitting* (CVF) é uma extensão do VF e foi desenvolvido para modelar sistemas fotônicos em banda-base (Ye et al., 2019; Spina et al., 2021; Ye et al., 2022). Enquanto o VF original impõe a restrição de complexo conjugado nos polos e resíduos para garantir que a resposta impulsiva no domínio do tempo seja real e a resposta em frequência seja simétrica em relação ao eixo das frequências, sistemas em banda-base, que não são físicos, exibem uma resposta em frequência assimétrica em relação a 0 Hz (Ye et al., 2019). A vantagem em utilizar tal modelagem é a possibilidade da redução do passo de integração sem comprometer sua exatidão. A modelagem de sistemas elétricos em banda-base pode ser encontrada na literatura especializada com o nome de fasores dinâmicos (Henschel, 1999) ou *Shifted Frequency Analysis* (Zhang, 2009).

Tanto o VF quanto o CVF produzem modelos com polos localizados no semiplano esquerdo conforme mostrado em Semlyen (1999). Contudo, essa condição não é garantia que no caso de sistemas matriciais a aproximação seja estável, sendo necessário um estágio posterior para impor a passividade à aproximação racional (Gustavsen, 2008a). Assim, o objetivo principal deste estudo é investigar os efeitos do CVF na precisão e passividade de componentes elétricos cujas respostas em frequência são dadas por parâmetros- $Y$  (admitância).

A estrutura deste manuscrito é a seguinte. Na Seção 2, são abordados a síntese da matriz admitância no domínio da frequência e as condições para a passividade. A Seção 3 apresenta os principais resultados, com quatro casos-teste utilizados para avaliar o desempenho do CVF. Dois desses casos envolvem a síntese da admitância terminal de transformadores de potência, outro é referente à modelagem de um equivalente de rede dependente da frequência (FDNE) e o último aborda o ajuste de uma linha de transmissão (LT) com parâmetros dependentes da frequência. Por fim, na Seção 4 são apresentadas as principais conclusões deste trabalho.

## 2. REALIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

No caso da realização de um sistema representado por admitância, tanto o VF como o CVF representam  $\mathbf{Y}_n$ , tal que

$$\mathbf{Y}_n \approx \bar{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{sE} + \mathbf{D} + \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{R}_n}{s - a_n}; \quad (1)$$

onde  $N$  é o número de polos,  $a_n$  é o conjunto comum de polos,  $\mathbf{R}_n$  é a matriz de resíduos, que pode ser real e ou complexa,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são matrizes constantes reais. Para o VF os polos são reais ou complexos conjugados e o CVF possui polos reais ou complexos.

O modelo em (1) pode ser convertido de polos-resíduos para espaço de estados, tal que

$$\bar{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{sE}; \quad (2)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes referentes ao modelo em espaço de estados.  $\mathbf{I}$  é matriz identidade de mesma ordem que  $\mathbf{A}$ .

### 2.1 Critérios de Passividade

Considerando  $\mathbf{G}_n = \text{Re}\{\mathbf{Y}_n\}$  e  $\lambda = \text{eig}(\mathbf{G}_n)$  (autovalores da matriz de condutâncias), um sistema será passivo se  $\lambda > 0$  em toda faixa de frequência. Ou seja,  $\mathbf{G}_n$  deve ser uma matriz positiva definida (Gustavsen, 2008a).

O método direto para a avaliação da passividade consiste na varredura dos valores de  $\lambda$ , em uma ampla faixa de frequência. Tal abordagem é computacionalmente custosa e não garante que a amostragem seja suficiente pequena para capturar as regiões onde há violação da passividade ( $\lambda < 0$ ). Estas regiões podem ser encontradas por meio das frequências de cruzamento calculadas pelos valores singulares (autovalores puramente imaginários) da matriz Hamiltoniana  $\mathbf{H}$  (Ye et al., 2018):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^h)^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^h)^{-1}\mathbf{B}^h \\ -\mathbf{C}^h(\mathbf{D} + \mathbf{D}^h)^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^h + \mathbf{C}^h(\mathbf{D} + \mathbf{D}^h)^{-1}\mathbf{B}^h \end{bmatrix}; \quad (3)$$

tal que  $h$  corresponde ao operador transposto conjugado. A principal diferença de (3) em relação à matriz Hamiltoniana do VF em Gustavsen (2008a) é a utilização do operador  $h$  ao invés do transposto, pois o sistema possui resposta complexa (Ye et al., 2018).

## 3. RESULTADOS

Esta seção apresenta os principais resultados obtidos neste trabalho. Em todos os casos, foi utilizada a mesma ordem de grandeza e o mesmo número de iterações para os ajustes do VF e CVF.

### 3.1 Caso-teste I

O primeiro caso aborda o ajuste da resposta em frequência de um transformador, utilizando os dados disponíveis no arquivo ex3.m (VF1 T3. Zi p), disponibilizado em Gustavsen (2008b). A raiz do erro quadrático médio (RMSE - *Root Mean Square Error*) para o VF e o CVF foi de 91;34 S e 55;75 S. O RMSE do VF é aproximadamente 1,63 vezes

maior que o CVF. Foram consideradas cinco iterações para ambos algoritmos e os modelos possuem ordem 20. A magnitude da resposta em frequência é apresentada na Figura 1. Verifica-se que o CVF, além de ter um RMSE menor que o VF, apresentou menor desvio na maior parte da faixa de frequência considerada.

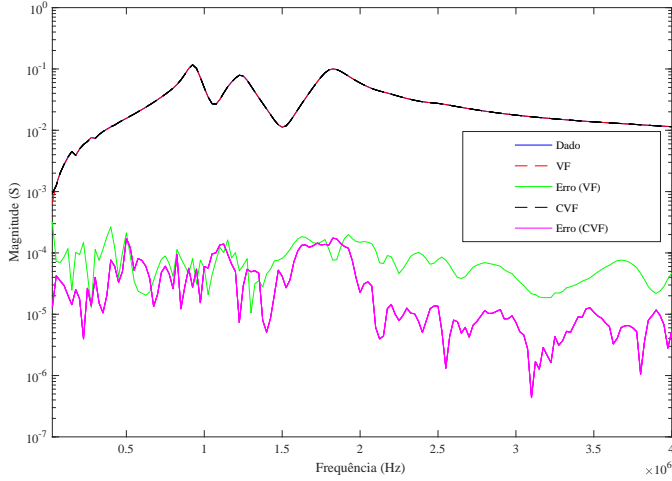


Figura 1. Magnitude do ajuste do VF e CVF para o Caso-teste I.

Os 20 polos utilizados nos ajustes são apresentados na Figura 2. Todos os polos estão no semiplano esquerdo, que é um requisito para a estabilidade. É possível verificar que todos os polos do VF vem na forma de pares complexo conjugados, ao contrário do CVF, pois não há uma simetria em relação ao eixo das abscissas.

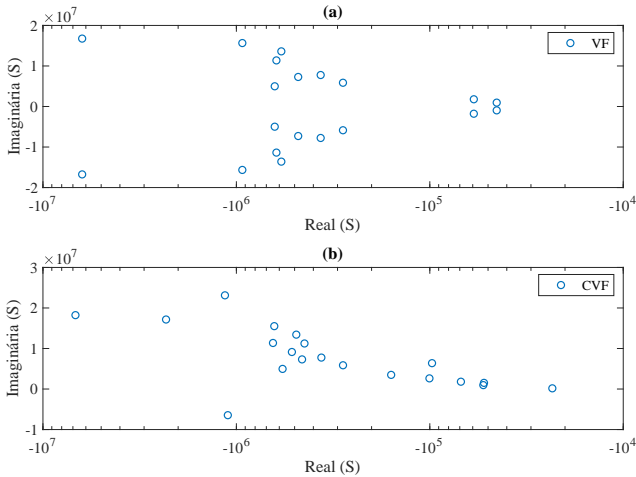


Figura 2. (a) Polos do ajuste do VF e (b) CVF para o Caso-teste I.

Em relação à passividade, o ajuste do VF retornou um modelo não passivo ao passo que o CVF retornou um modelo passivo. Pela análise de  $\text{eig}(\mathbf{H})$ , a violação ocorreu para frequências a partir de 6,19 MHz. A Figura 3 indica que para frequências maiores que 6 MHz, os autovalores da matriz condutância para o VF são negativos, indicando a não-passividade do modelo.

### 3.2 Caso-teste II

O segundo caso trata da modelagem de um transformador de distribuição trifásico de 2 MVA, obtidos com dados de

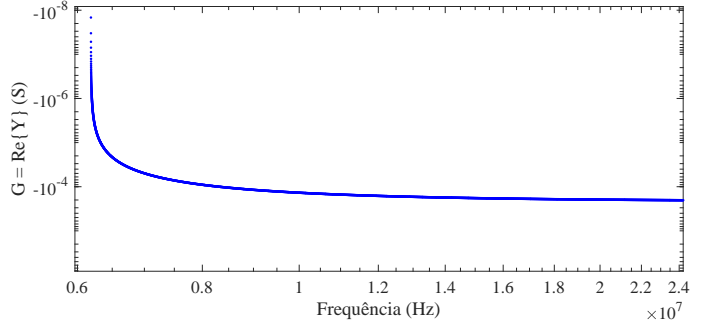


Figura 3. Varredura dos autovalores negativos da matriz condutância do VF para o Caso-teste I.

bancada. Os resultados obtidos indicam que o RMSE do VF é aproximadamente 1,91 vezes maior que o do CVF. O VF apresentou um RMSE de 462,82 S, enquanto o CVF obteve um RMSE de 242,78 S, com ambos os algoritmos executando 10 iterações e utilizando modelos de ordem 48. Além disso, a análise da magnitude da resposta em frequência, mostrada na Figura 4, revelou que o CVF apresentou um desvio menor em praticamente toda faixa de frequência considerada, em comparação com o VF.

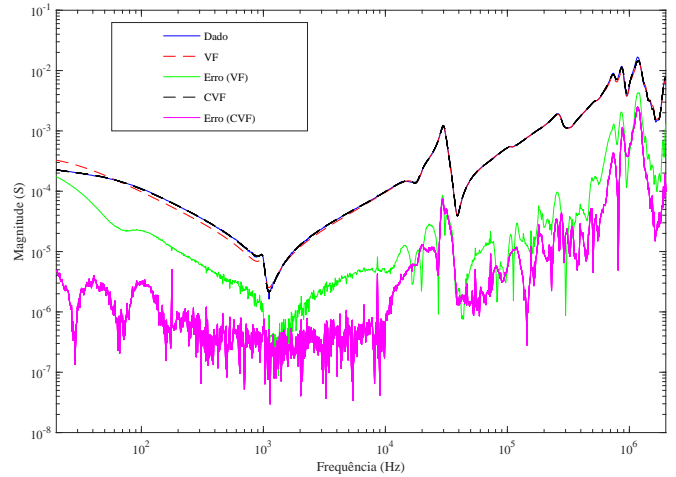


Figura 4. Magnitude do ajuste do VF and CVF para o Caso-teste II.

Foram empregados 48 polos nos ajustes, como apresentado na Figura 5. Todos os polos se encontram no semiplano esquerdo. É notável que todos os polos do VF são representados por pares complexos conjugados e o mesmo não acontece no CVF.

Ambos modelos apresentam violações de passividade, como evidenciado na Figura 6 por diversos intervalos onde os autovalores são negativos. Portanto, conclui-se que esses modelos não são passivos.

### 3.3 Caso-teste III

O terceiro caso envolve a resposta em frequência de uma FDNE de um sistema de distribuição trifásico e multiportas (6 terminais), que pode ser encontrado no arquivo ex4a.m em Gustavsen (2008b). O RMSE obtido pelo VF é aproximadamente 342,20 vezes maior que o do CVF. O VF registrou um RMSE de 242,96 S, enquanto o CVF obteve 0,71 S. Foram consideradas 5 iterações

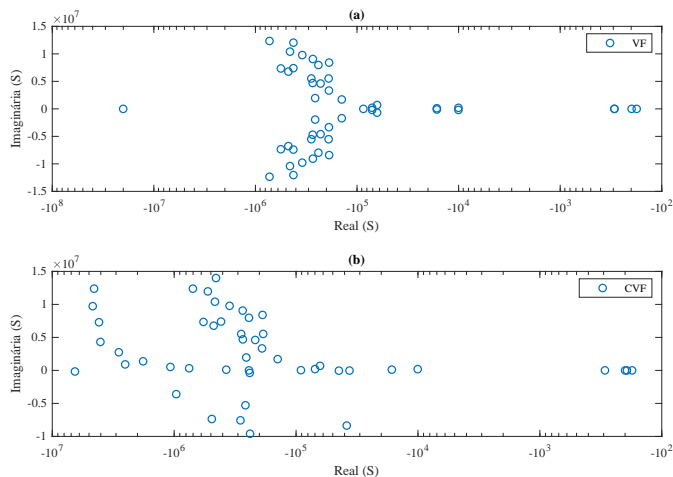


Figura 5. (a) Polos do ajuste do Vector Fitting (VF) e (b)

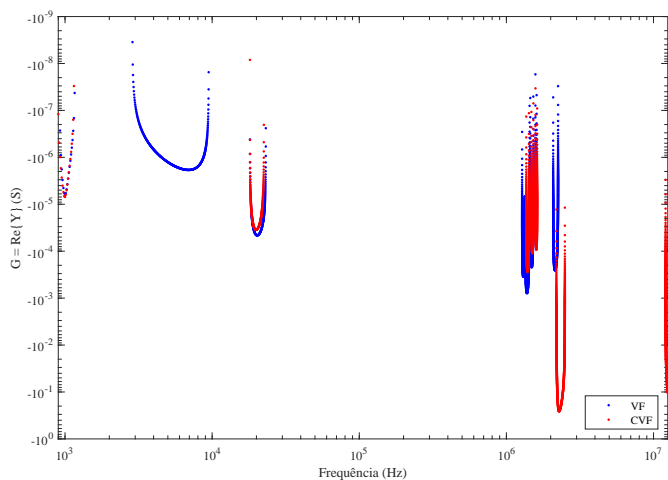


Figura 6. Varredura dos autovalores negativos da matriz condutância do ajuste do VF e CVF para o Caso-teste II.

para ambos algoritmos e os modelos possuem ordem 50. Adicionalmente, a avaliação da magnitude da resposta em frequência, ilustrada nas Figuras 7 e 8, constata que o CVF exibe desvio inferior em praticamente toda a faixa de frequência em comparação com o VF, sendo mais significativa para frequências mais baixas.

Foram utilizados 50 polos para realizar os ajustes, conforme mostrado na Figura 9. Todos esses polos estão localizados no semiplano esquerdo. Observa-se, novamente, que no VF os polos são representados, necessariamente, por pares complexos conjugados.

Ambos os modelos (VF e CVF) não são passivos. Houve violação da passividade em toda a faixa de frequência considerada. Nesse caso, foi possível verificar visualmente a falta de passividade nas Figuras 10 e 11, correspondentes ao VF e CVF, respectivamente.

### 3.4 Caso-teste IV

Por fim, o quarto caso refere-se à resposta em frequência de uma LT trifásica aérea de 132 kV com 12 km de extensão, (arquivo ex2Y. m, disponível em Gustavsen (2008b)). O VF e o CVF alcançaram RMSE de 290;67 S e 4;10 pS, respectivamente. A redução no RMSE foi a mais signifi-

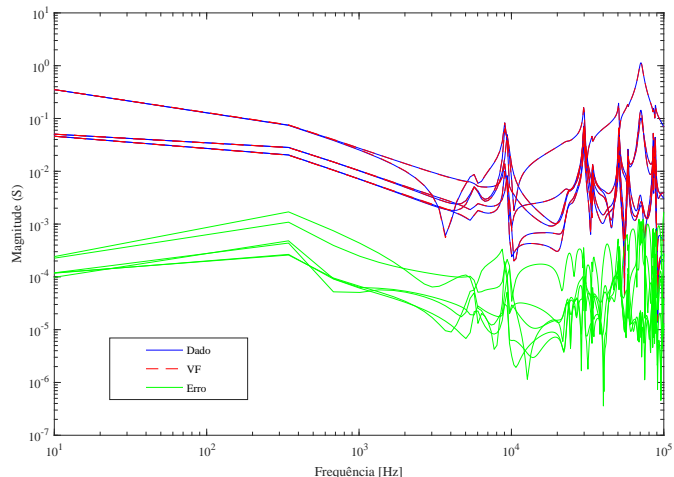


Figura 7. Magnitude do ajuste do VF para o Caso-teste III.

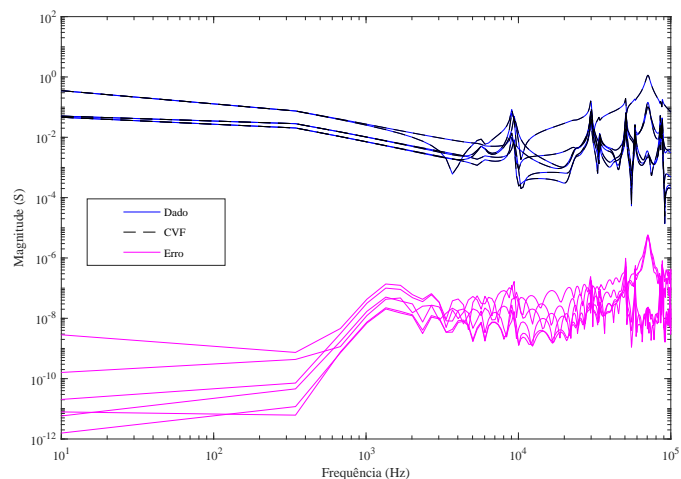


Figura 8. Magnitude do ajuste do CVF para o Caso-teste III.

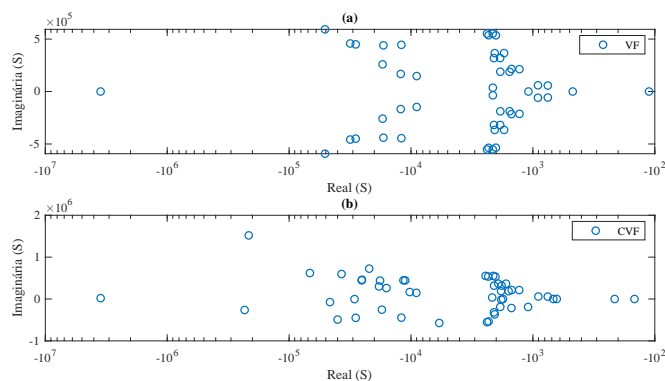


Figura 9. (a) Polos do ajuste do Vector Fitting (VF) e (b) Complex Vector Fitting (CVF) para o Caso-teste III.

cativa entre os quatro casos apresentados, de forma que o RMSE do VF é aproximadamente 70,89 M vezes maior que o obtido pelo CVF. Foram consideradas 11 iterações para ambos algoritmos e os modelos possuem ordem 50. As magnitudes das respostas em frequência são ilustradas nas Figuras 12 e 13. Além do menor RMSE, o CVF também exibiu um desvio significativamente menor em toda a faixa de frequência considerada, em comparação com o VF.

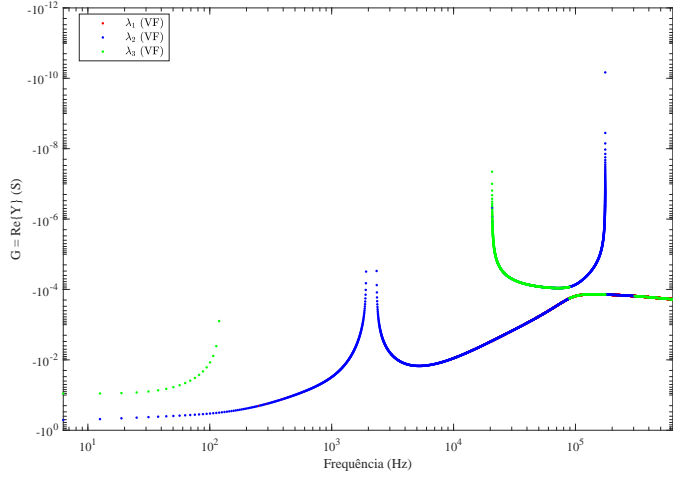


Figura 10. Varredura dos autovalores negativos da matriz condutância do ajuste do VF para o Caso-teste III.

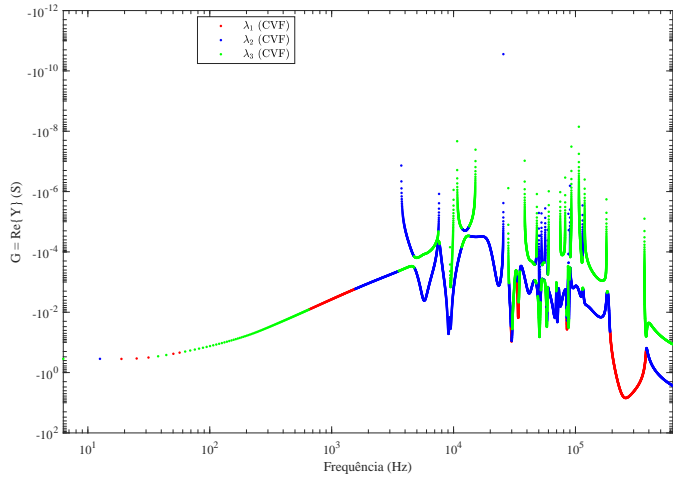


Figura 11. Varredura dos autovalores negativos da matriz condutância do ajuste do CVF para o Caso-teste III.

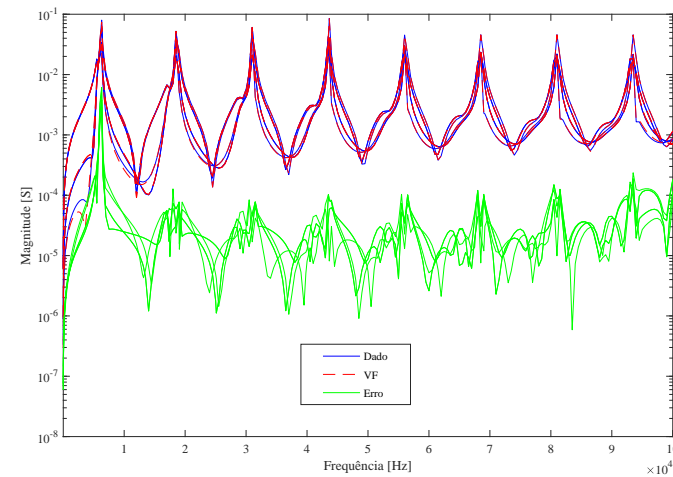


Figura 12. Magnitude do ajuste do VF para o Caso-teste IV.

Foram empregados 50 polos para realizar os ajustes, como evidenciado na Figura 14. Todos esses polos estão posicionados no semiplano esquerdo. De forma consistente com

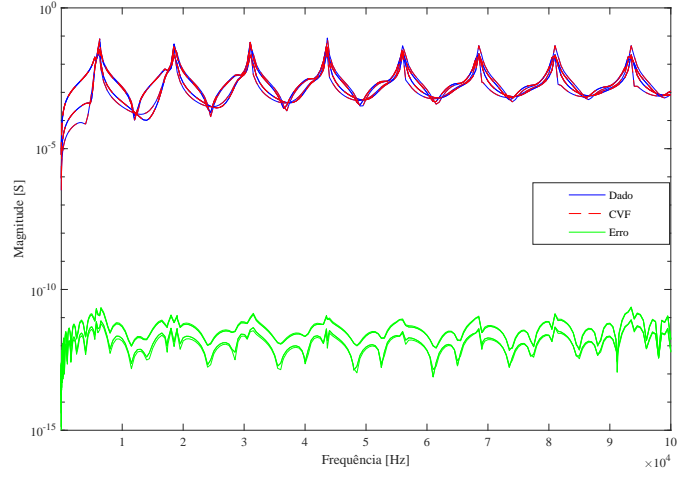


Figura 13. Magnitude do ajuste do CVF para o Caso-teste IV.

os demais casos, os polos do CVF não são necessariamente representados por pares complexos conjugados.

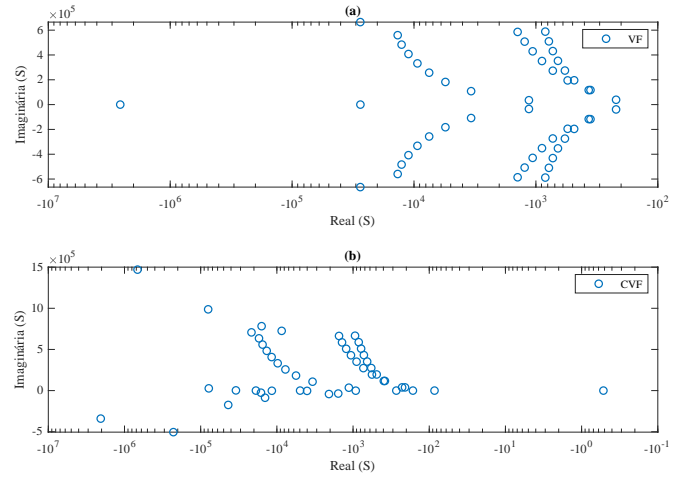


Figura 14. (a) Polos do ajuste do Vector Fitting (VF) e (b) Complex Vector Fitting (CVF) para o Caso-teste IV.

No que diz respeito à passividade, o ajuste do VF resultou em um modelo não passivo, enquanto o CVF produziu um modelo passivo. A violação ocorreu no intervalo de frequência entre 0,22 kHz e 3,41 kHz, conforme evidenciado pela análise de  $eig(\mathbf{H})$  e pela Figura 15 que apresenta os autovalores negativos da matriz condutância para o VF.

#### 4. DISCUSSÃO

O uso do CVF resultou em uma redução significativa no RMSE em todos os casos-teste analisados neste estudo, sendo especialmente notável no Caso-teste IV, no qual o RMSE do VF foi aproximadamente sete ordens de magnitude maior do que o do CVF. A síntese desses resultados é apresentada na Tabela 1. Um resumo sobre a passividade dos modelos é apresentada na Tabela 2. É possível observar que nos Casos-teste I e IV, o CVF foi capaz de produzir um modelo passivo e com menor RMSE em comparação ao VF, que não resultou em um modelo passivo.

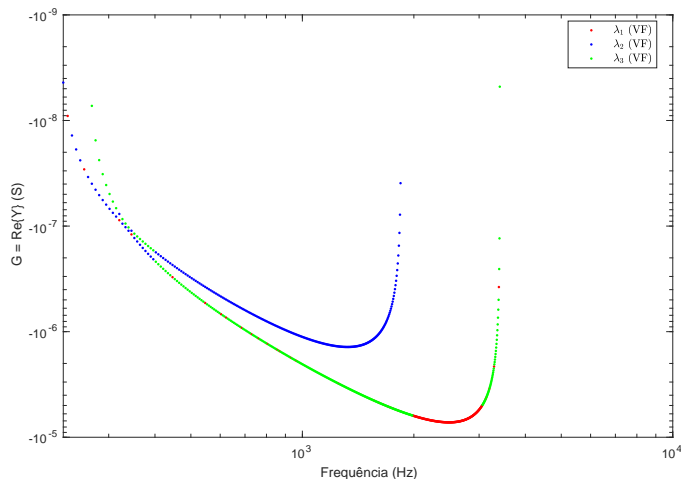


Figura 15. Varredura dos autovalores negativos da matriz condutância do ajuste do VF para o Caso-teste IV.

Nas dinâmicas dos sistemas elétricos, as respostas transitórias que envolvem tensões e correntes são inerentemente reais. Contudo, o CVF permite a inclusão de sinais analíticos na análise de transitórios em sistemas de potência, em que a envoltória complexa representa a amplitude do fasor dinâmico e a parcela real corresponde ao sinal original no domínio do tempo.

Tabela 1. Resumo dos RMSE obtidos.

Caso-teste	I	II	III	IV
RMSE VF ( $S$ )	91,34 $\mu$	462,82 $\mu$	242,96 $\mu$	290,67 $\mu$
RMSE CVF ( $S$ )	55,75 $\mu$	242,78 $\mu$	0,71 $\mu$	4,10 $\mu$
$\frac{\text{RMSE VF}}{\text{RMSE CVF}}$	1,63	1,91	342,20	70,89 M

Tabela 2. Resumo do teste de passividade.

Caso-teste	I	II	III	IV
VF	Não	Não	Não	Não
CVF	Sim	Não	Não	Sim

## 5. CONCLUSÕES

A utilização do *Complex Vector Fitting* (CVF), por não ter a restrição de produzir modelos com polos em pares complexos conjugados, resultou em modelos com a raiz do erro quadrático médio (RMSE) menor em comparação ao *Vector Fitting* (VF). A redução do RMSE é interessante, pois, para um dado RMSE máximo tolerado, é possível utilizar uma ordem menor para modelar o problema, reduzindo, assim, sua complexidade. No que diz respeito à passividade, em dois casos foi demonstrado que o CVF, ao contrário do VF, produziu modelos passivos. No entanto, é importante salientar que o uso do CVF pode resultar em uma resposta impulsiva complexa. As demais implicações decorrentes da complexidade da resposta impulsiva do modelo CVF serão abordadas em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

Deschrijver, D., Mrozowski, M., Dhaene, T., and De Zutter, D. (2008). Macromodeling of multiport systems using a fast implementation of the vector fitting method. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 18(6), 383–385.

- Grivet-Talocia, S. and Gustavsen, B. (2015). *Passive Macromodeling: Theory and Applications*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley.
- Gustavsen, B. (2002). Rational approximation of frequency dependent admittance matrices. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 17(4), 1093–1098.
- Gustavsen, B. (2006). Improving the pole relocation properties of vector fitting. *IEEE Trans. Power Delivery*, 21(3), 1587–1592.
- Gustavsen, B. (2008a). Fast passivity enforcement for pole-residue models by perturbation of residue matrix eigenvalues. *IEEE Trans. Power Delivery*, 23(3), 2278–2285.
- Gustavsen, B. (2008b). The vector fitting website. URL <https://www.sintef.no/projectweb/vectorfitting/>.
- Henschel, S. (1999). *Analysis of Electromagnetic and Electromechanical Power System Transients With Dynamic Phasors*. Doutorado, The University of British Columbia.
- Lima, A.C., Camara, F., Salvador, J.P., and de Barros, M.T.C. (2020). Frequency-dependent equivalent based on idempotent decomposition and grouping. *Electric Power Systems Research*, 189, 106800.
- Noda, T. (2005). Identification of a multiphase network equivalent for electromagnetic transient calculations using partitioned frequency response. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 20(2), 1134 – 1142.
- Semlyen, A. (1999). S-domain methodology for assessing the small signal stability of complex system in non-sinusoidal steady state. *IEEE Trans. on Power Systems*, 14(1), 132–137.
- Spina, D., Ye, Y., Deschrijver, D., Bogaerts, W., and Dhaene, T. (2021). Complex vector fitting toolbox: a software package for the modelling and simulation of general linear and passive baseband systems. *Electronics Letters*, 57(10), 404–406.
- Ubolli, A. and Gustavsen, B. (2010). Comparison of methods for rational approximation of simulated time-domain responses: ARMA, ZD-VF and TD-VF. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 26(1), 279–288.
- Ye, Y., Spina, D., Deschrijver, D., Bogaerts, W., and Dhaene, T. (2019). Time-domain compact macromodeling of linear photonic circuits via complex vector fitting. *Photonics Research*, 7(7), 771.
- Ye, Y., Spina, D., Xing, Y., Bogaerts, W., and Dhaene, T. (2018). Numerical modeling of a linear photonic system for accurate and efficient time-domain simulations. *Photon. Res.*, 6(6), 560–573. doi:10.1364/PRJ.6.000560.
- Ye, Y., Ullrick, T., Bogaerts, W., Dhaene, T., and Spina, D. (2022). SPICE-Compatible Equivalent Circuit Models for Accurate Time-Domain Simulations of Passive Photonic Integrated Circuits. *Journal of Lightwave Technology*, 40(24), 7856–7868.
- Zhang, P. (2009). *Shifted Frequency Analysis For EMTP Simulation of Power System Dynamics*. Doutorado, The University of British Columbia.