

Regulador Recursivo para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Atraso Aleatório no Estado

Elizandra K. Odorico * Marco H. Terra *

* Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil. (e-mails:
elizandra.odorico@usp.br e terra@sc.usp.br).

Abstract: We propose a recursive regulator for discrete-time Markov jump linear systems with random state delay. The time-delay belongs to a known interval, and the rate of change between two consecutive delays is considered. By applying the augmented system approach and modeling the delay by a Markov chain, we obtain a delay-free Markovian system. For this system, a min-max optimization problem is formulated whose solution provides a state-feedback control law. The stability conditions of the recursive regulator are achievable through coupled Riccati equations. Moreover, we validate the performance of the proposed regulator with a numerical example.

Resumo: Um regulador recursivo para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos de tempo discreto com atraso aleatório no estado é proposto. O atraso pertence a um intervalo conhecido e a taxa de variação máxima entre dois atrasos consecutivos é considerada. Por meio da abordagem de sistema aumentado e modelando o atraso por uma cadeia de Markov, obtém-se um sistema Markoviano sem atraso. Para este sistema, um problema de otimização min-max é formulado, cuja solução fornece uma lei de controle de realimentação de estado. As condições de estabilidade do regulador proposto são alcançáveis através de equações de Riccati acopladas. Além disso, o desempenho do regulador proposto é avaliado através de um exemplo numérico.

Keywords: Random delay; Markovian system; discrete-time systems; recursive regulator; state-feedback.

Palavras-chave: Atraso aleatório; sistema Markoviano; sistemas de tempo discreto; regulador recursivo; realimentação de estado.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos cujos parâmetros da planta alteram-se de forma abrupta devido a falhas de sensores, perdas de pacotes, mudanças ambientais, entre outros, geralmente são descritos por um conjunto de subsistemas lineares que mudam constantemente (ou saltam) de um modelo para outro. Nesse caso, os saltos são descritos em termos de probabilidades de transição associadas a uma cadeia de Markov subjacente chaveando o sistema geral. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) têm sido objeto de estudo para muitos pesquisadores, uma vez que abrange várias aplicações do mundo real, como controle de aeronaves tolerantes a falhas, sistemas de comunicação e manipuladores robóticos (Costa et al., 2005).

Neste trabalho, trata-se da classe de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos e atraso no estado (SLSMae) de tempo discreto. Os atrasos de tempo conduzem frequentemente a comportamentos complexos na dinâmica dos sistemas e podem deteriorar o desempenho, ou mesmo

causar instabilidade, nos sistemas de controle (Fridman, 2014). Além disso, em muitas aplicações da engenharia, os sistemas estão sujeitos a atrasos variantes no tempo como, por exemplo, em controles multitarefa de sistemas em rede com atraso de tempo do sensor para o controlador e/ou do controlador para o atuador (Qiu et al., 2013).

Na literatura, muitos resultados teóricos são encontrados para SLSMae, como as abordagens de controle H_∞ [(Yao et al., 2008), (Kang et al., 2013), (Luan et al., 2014) e (Yang et al., 2014)], condições de estabilização [(Sun et al., 2006) e (Zhang et al., 2008)], entre outros. Especialmente, no trabalho de Sun et al. (2006), uma função de Lyapunov é proposta para estabelecer condições de estabilização dependentes de atraso, para sistemas chaveados com atraso variante no tempo. Além disso, em Zhang et al. (2008) são propostas condições de estabilidade e estabilização dependentes do intervalo de atraso para os SLSMae. Todas essas abordagens são baseadas em procedimentos de otimização com restrições de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Por outro lado, controladores recursivos para SLSMae são escassos na literatura especializada.

Desta forma, um regulador recursivo para SLSMae com probabilidades de transição conhecidas é proposto neste trabalho. A ocorrência do tempo de atraso é modelada

* Este trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob protocolo 383402/2023-9 vinculado ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia (INCT) 465755/2014-3.

por meio de uma segunda cadeia de Markov, em conjunto com a taxa de variação máxima do atraso definida pela matriz de probabilidade. Posteriormente, um sistema aumentado é definido cujo conhecimento exato do tempo de atraso não é incorporado neste novo modelo. A partir deste sistema, um problema de otimização é formulado por meio da combinação do problema de mínimos-quadrados ponderados com o método de função penalidade. A solução deste problema fornece recursivamente os ganhos de realimentação de estado, os quais estabilizam o SLSMae em malha fechada, levando em consideração o tempo de atraso aleatório no estado.

Notações: \mathbb{R} é o conjunto dos números reais, \mathbb{R}^n o conjunto dos vetores reais n -dimensionais e $\mathbb{R}^{m \times n}$ o conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$. I_n é a matriz identidade de dimensão $n \times n$. A transposta de A é representada por A^T . Para uma matriz real P , $P \succ 0$ denota que P é uma matriz simétrica definida positiva. $\mathbb{E}\{x\}$ denota o valor esperado de x , enquanto $Pr(\cdot)$ denota a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. A norma euclidiana quadrática ponderada de x é denotada por $\|x\|_P^2 = x^T P x$, com $P \succ 0$. Por conveniência, adota-se $x^T P x = x^T P(\bullet)$. O espaço linear composto por todas as s -seqüências de matrizes $A = (A_1, \dots, A_s)$ com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \{1, \dots, s\}$ é definido por $\mathbb{H}^{n \times m}$. Por fim, $\mathbb{H}_+^n = \{A = (A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{H}^{n \times n} : A_i = A_i^T \succ 0, i \in \{1, \dots, s\}\}$.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Modelo do Sistema

Considere o seguinte sistema linear sujeito a saltos Markovianos e atraso no estado de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{\theta_k, k} x_k + A_{d, \theta_k, k} x_{k-d_k} + B_{\theta_k, k} u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

para $k = 0, 1, \dots, N$, no qual $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o estado no instante k , $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$ é o estado atrasado para d_k amostras, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $\varphi_0(k)$ é a condição inicial para $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ e $A_{\theta_k, k}$, $A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são as matrizes paramétricas conhecidas.

O processo estocástico $\{\theta_k, k \geq 0\}$ é descrito por uma cadeia de Markov de estado finito e tempo discreto $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ associado à matriz de probabilidade de transição conhecida $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $i, j \in \mathcal{S}$, cujas entradas satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \Pr(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i) = p_{ij}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \text{e} \quad \Pr(\theta_0 = i) = \pi_i. \end{aligned} \quad (2)$$

O atraso de tempo d_k é governado aleatoriamente por uma segunda cadeia de Markov $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$, $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$, onde

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \quad \text{e} \quad \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max}, \quad (3)$$

sendo $d_{min} = \min\{d_k\}$, $d_{max} = \max\{d_k\}$ e Δd a taxa máxima de variação do atraso entre dois instantes consecutivos, onde a amostra futura d_{k+1} pode assumir quaisquer valores pertencentes ao intervalo $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$, com $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$ e $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$. A cadeia de Markov $\bar{\theta}_k$ é associada a uma matriz de

probabilidade de transição $\bar{\mathbb{P}} = [\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}] \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$, $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$ com o vetor de distribuição inicial $\bar{\pi}_{\bar{i}, 0}$ e as entradas satisfazendo analogamente as condições estabelecidas em (2). Além disso, a probabilidade de transição $\bar{\mathbb{P}}$ é definida de acordo com a taxa máxima de variação do atraso, ou seja,

$$\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{cases} 1/\bar{s} & \begin{cases} \bar{j} \in (\bar{d}_{min} + 1, \bar{d}_{max} + 1), & d_{min} = 0, \\ \bar{j} \in (\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}), & d_{min} \neq 0, \\ \text{caso contrário.} \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Para regular o SLSMae (1) sob probabilidade de transição conhecida, a seguinte lei de controle dependente do modo é adotada:

$$u_k = \mathcal{K}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (5)$$

onde z_k é o estado aumentado relacionado à condição inicial z_0 ,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{max}+1) \\ \varphi_0(-d_{max}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

e $\mathcal{K}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = [K_{1, \theta_k, k} \ K_{2, \theta_k, k} \ \dots \ K_{\bar{s}, \theta_k, k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$, com $n_d = d_{max}n + n$, sendo o ganho a ser determinado.

Observe que (5) é uma lei de controle de realimentação de estado dependente dos modos e independente do atraso. Portanto, como a lei de controle proposta descarta o conhecimento em tempo real do atraso d_k , o SLSMae (1) será transformado em um sistema livre da presença de atraso correspondente, de modo que a lei de controle proposta garanta estabilidade do sistema em malha fechada. Na seção a seguir, este procedimento será descrito.

2.2 Descrição do Modelo Aumentado

Baseado na abordagem de sistema aumentado (Hetel et al. (2008)) e no tempo de atraso exibindo comportamento Markoviano (Qiu et al. (2015)), podemos reescrever o Sistema (1) como um SLSM sem atraso, em termos do estado aumentado (6) e governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, definido por

$$z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \quad (7)$$

para cada $k = 0, 1, \dots, N$, onde as matrizes aumentadas $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ e $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$, $\forall \theta_k \in \mathcal{S}$ e $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$ são definidas por

$$\begin{aligned} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \begin{bmatrix} A_{\theta_k, k} & \overbrace{0 \cdots 0}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & A_{d, \theta_k, k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{d_{max}n} & & & & 0_{d_{max}n \times n} \end{bmatrix}, \\ G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \begin{bmatrix} B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max}n \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2$ representa o número de matrizes nulas $0_{n \times n}$ entre $A_{\theta_k, k}$ e $A_{d, \theta_k, k}$. Se $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2 = 1$, então o elemento da primeira coluna de $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ é igual a $A_{\theta_k, k} + A_{d, \theta_k, k}$ e os outros elementos da linha são nulos. Além disso, observe que o chaveamento dos modos de operação do SLSM (7) ocorre de acordo com as duas cadeias de Markov $\theta_k \in \mathcal{S}$ e $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$, sendo θ_k relacionada com os modos de operação do Sistema (1) e a segunda cadeia $\bar{\theta}_k$ com a variação do tempo de atraso, definindo a estrutura das matrizes aumentadas do sistema.

2.3 Problema de Controle

A principal contribuição deste trabalho é fornecer um conjunto de ganhos estabilizadores $\mathbb{K}_k = \{\mathcal{K}_k \in \mathbb{H}^{m \times n_d}\}$, tal que $\mathcal{K}_k = [K_{1,1,k} \dots K_{1,s,k} \dots K_{\bar{s},1,k} \dots K_{\bar{s},s,k}] \in \mathbb{H}^{m \times n_d}$ estabiliza o Sistema (7) na média quadrática quando $u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k$, com $\theta_k \in \mathcal{S}$ e $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$. Para alcançar este objetivo, o Sistema (1) foi transformado no SLSM (7) governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes. Assim, o projeto de um Regulador Recursivo para o SLSMae (1) pode ser realizado, equivalentemente, em termos do SLSM (7).

Desta forma, baseado em Cerri e Terra (2017), o seguinte problema de otimização restrito é proposto, onde o valor esperado da função custo ao longo da sequência de trajetória z_k deve ser minimizado:

$$\begin{aligned} \min_{z_{k+1}, u_k} \mathbb{E} \left\{ J_N \mid \bar{\mathcal{O}}_0, \mathcal{O}_0 \right\} \\ \text{sujeito a } z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \end{aligned} \quad (9)$$

onde

$$J_N = \|z_N\|_{P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|z_k\|_{Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^2 + \|u_k\|_{R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^2 \right), \quad (10)$$

para todo $k = 0, 1, \dots, N$, onde $\bar{\mathcal{O}}_0 = \{\bar{\theta}_0 = \bar{i}, z_0\}$, $\mathcal{O}_0 = \{\theta_0 = i, x_0\}$ e $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N}$, $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ e $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ são as matrizes de ponderação definidas positivas. A solução deste problema fornece a entrada de controle u_k^* que regula o SLSM (7) e, conseqüentemente, o sistema Markoviano com atraso (1).

3. PROBLEMA DE MÍNIMOS-QUADRADOS PONDERADOS RESTRITOS

Considere o problema de determinar um vetor desconhecido $z \in \mathbb{R}^s$ relacionado ao sistema dinâmico,

$$Nz = y, \quad (11)$$

com a matriz conhecida $N \in \mathbb{R}^{l \times s}$ e o vetor de medida $y \in \mathbb{R}^l$. Assim, considera-se o seguinte problema de mínimos-quadrados ponderados restrito, no qual a função objetiva $\mathcal{F}(z)$ deve ser minimizada,

$$\begin{aligned} \min_z \mathcal{F}(z) = \|Mz - w\|_{\mathcal{V}}^2 \\ \text{sujeito a } Nz = y, \end{aligned} \quad (12)$$

onde $M \in \mathbb{R}^{r \times s}$ é uma matriz conhecida, $w \in \mathbb{R}^r$ é um vetor de medida e $\mathcal{V} \succ 0$ é uma matriz de ponderação.

O método da função penalidade (Luenberger e Ye (2008)) pode ser utilizado para resolver o problema restrito (12). Assim, a restrição (11) é incluída na função custo $\mathcal{F}(z)$ como um termo quadrático multiplicado por um parâmetro de penalidade $\mu > 0$, que penaliza qualquer violação da restrição. Desta forma, para um $\mu > 0$ fixado, o problema (12) pode ser reescrito como um problema de mínimos-quadrados ponderados irrestrito,

$$\min_x \mathcal{F}(x) = (Ax - b)^T W_\mu (Ax - b), \quad (13)$$

onde

$$x \leftarrow z, \mathcal{A} \leftarrow \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} \text{ e } W_\mu \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Para resolver os problemas de otimização (12) e (13), aplicam-se os resultados apresentados em Ishihara et al. (2010). Logo, o vetor de estado x e o mínimo da função custo $\mathcal{F}(x)$ para o problema (13), condicionados ao parâmetro de penalidade μ , são obtidos. Deste resultado, a solução ótima do problema restrito original (12) é alcançada quando $\mu \rightarrow \infty$, de acordo com Luenberger e Ye (2008). No próximo lema, ambas soluções são fornecidas.

Lema 1. Considere os problemas de otimização (12) e (13). Suponha que $W_\mu \succ 0$. Então, existem soluções ótimas únicas x^* para (12) e z^* para (13), obtidas de acordo com as seguintes condições:

- (i) Para cada $\mu > 0$, o vetor de estado ótimo x^* e o valor mínimo da função custo $\mathcal{F}(x^*)$ para o problema (13) são dados por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ \mathcal{F}(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_\mu^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

- (ii) Se a matriz N tem posto linha pleno, então considere $\mu \rightarrow +\infty$, tal que o vetor de estado ótimo z^* e o valor mínimo de $\mathcal{F}(z^*)$ para o problema (12) são dados por

$$\begin{bmatrix} z^* \\ \mathcal{F}(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & M \\ 0 & 0 & N \\ M^T & N^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w & 0 \\ y & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Prova. (i) Segue-se da solução proposta em Kailath et al. (2000), a qual é reescrita, equivalentemente, em termos de uma estrutura matricial simétrica. Sobre a invertibilidade da matriz central em (15) veja (Nikoukhah et al., 1992, Lemma 2.1). (ii) Uma vez que $\mu \rightarrow +\infty$, obtém-se a solução ótima para o problema restrito, conforme Luenberger e Ye (2008).

4. REGULADOR RECURSIVO NOMINAL

De acordo com o princípio de otimalidade de Bellman (Bertsekas (1995)), o problema de controle (9)-(10) pode ser separado em N problemas de otimização de um passo, isto é,

$$\begin{aligned} \min_{z_{k+1}, u_k} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ \text{sujeito a } z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \end{aligned} \quad (17)$$

com a função custo de um passo definida como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_{k+1}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} z_{k+1} + \\ z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \end{aligned}$$

onde o operador $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$ é dado por

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} = \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{\theta}_k, \bar{j}} p_{\theta_k, j} P_{\bar{j}, j, k+1}.$$

Posteriormente, o problema de controle restrito (17) é transformado em um problema irrestrito mais conveniente, através do método da função penalidade. A restrição é incluída na função objetivo por um parâmetro de penalidade $\mu > 0$. A violação da restrição do problema será penalizada por este parâmetro. Portanto, para um $\mu > 0$ fixado, o problema (17) pode ser reescrito como

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (18)$$

com um novo funcional de custo quadrático

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, u_k) = \left(\begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \times \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Observe que o problema (18)-(19) tem a forma de um problema de mínimos-quadrados ponderados restrito (Seção 3), quando são realizadas as seguintes identificações entre os problemas (13) e (18)-(19):

$$x := \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad W_{\mu} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k. \quad (20)$$

Desta forma, referimos a (18)-(19) como um *problema de controle de mínimos-quadrados ponderados*. Logo, o resultado apresentado no Lema 1 pode ser aplicado para encontrar uma solução para o problema de controle proposto (18)-(19). No Teorema 1 é estabelecido o estado do sistema, a entrada de controle e a função custo, que compõem o Regulador Recursivo Nominal.

Teorema 1. Considere o problema de controle de mínimos-quadrados ponderados (18)-(19), com $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$, $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$, $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$. Para $k = N, \dots, 0$ e $\mu > 0$ fixado, a solução é recursivamente dada por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (21)$$

onde, $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$, $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ e $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$, são obtidos conforme descrito no Algoritmo 1.

Prova. Aplicando o Lema 1 juntamente com as identificações (20), obtém-se o seguinte sistema de equações lineares simultâneas,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{i}, \bar{i}, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{i}, \bar{i}, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{i}, \bar{i}, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I_{n_d} & I_{n_d} & -G_{\bar{i}, \bar{i}, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -G_{\bar{i}, \bar{i}, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ L_{\mu, \bar{i}, \bar{i}, k} \\ K_{\mu, \bar{i}, \bar{i}, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{i}, \bar{i}, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

para $\bar{i} = \theta \in \mathcal{S}$, $\bar{i} = \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{S}}$, sendo $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ um conjunto composto por variáveis matriciais auxiliares. As expressões (22)-(24) são válidas se, e somente se, o sistema de equações (25) possui uma única solução. Além disso, pela combinação de (21) e (25), segue que $P_{\mu, \bar{i}, \bar{i}, k} = -X_3 + F_{\bar{i}, \bar{i}, k}^T X_4$. Portanto, para qualquer $\mu > 0$, resolvemos (25) para $X_1, X_2, X_3, X_4, L_{\mu, \bar{i}, \bar{i}, k}$ e $K_{\mu, \bar{i}, \bar{i}, k}$ para obter (22)-(24).

Observação 1. Observe que (21) existe para qualquer parâmetro de penalidade $\mu > 0$, que é ajustado antecipada-

Algoritmo 1 Regulador Recursivo Nominal (RRN)

Modelo: Assumir o modelo de SLSMae (1).

SLSM: Definir o SLSM aumentado (7) conforme (6)-(8), com θ_k e $\bar{\theta}_k$ associadas às \mathbb{P} e $\bar{\mathbb{P}}$, respectivamente, satisfazendo (2).

Regulador Recursivo Nominal:

Condições iniciais: Sejam $N, \mu > 0, x_0, \pi_0, \bar{\pi}_0, P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0, Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ e $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$.

Para todo $k = N-1, \dots, 0$:

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} = (\mu^{-1} I_{n_d} + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})^{-1},$$

$$\Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} + \mu^{-1} I_{n_d} (\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (22)$$

$$K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (23)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (24)$$

SLSMae: Obter para cada $k = 0, \dots, N-1$:

$$x_{k+1} = A_{\theta_k, k} x_k + A_{d, \theta_k, k} x_{k-d_k} + B_{\theta_k, k} u_k,$$

$$\text{com } u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k.$$

mente e mantido fixo durante a simulação. Esta característica difere das abordagens baseadas em LMIs, em que a existência de uma solução deve ser verificada a priori.

Observação 2. Se $\mu \rightarrow \infty$, então $\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \rightarrow \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$ e $\Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow I_{n_d}$. Portanto, (24) torna-se

$$P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \times \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (26)$$

que representa uma equação de Riccati clássica (Costa et al., 2005) governada por duas cadeias de Markov independentes.

4.1 Condições para Estabilidade e Convergência

As condições de estabilidade e convergência do regulador recursivo proposto são analisadas quando os parâmetros do SLSM (7) são invariantes no tempo. As matrizes de probabilidade $p_{\bar{i}\bar{j}}$ e p_{ij} , com $\bar{i} \in \mathcal{S}$ e $i \in \mathcal{S}$ também são consideradas constantes. Desta forma, as seguintes matrizes são definidas $\mathbf{F} = (F_{1,1}, \dots, F_{1,s}, \dots, F_{\bar{s},1}, \dots, F_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{G} = (G_{1,1}, \dots, G_{1,s}, \dots, G_{\bar{s},1}, \dots, G_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$, $\mathbf{P}_k = (P_{\mu, 1,1,k}, \dots, P_{\mu, 1,s,k}, \dots, P_{\mu, \bar{s},1,k}, \dots, P_{\mu, \bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$, $\mathbf{Q} = (Q_{1,1}, \dots, Q_{1,s}, \dots, Q_{\bar{s},1}, \dots, Q_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ e $\mathbf{R} = (R_{1,1}, \dots, R_{1,s}, \dots, R_{\bar{s},1}, \dots, R_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^m$.

Proposição 1. Considere $\mathbf{F} \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ conhecidas a priori. Assuma que (\mathbf{F}, \mathbf{G}) é estabilizável e (\mathbf{Q}, \mathbf{F}) é detectável. Então, para qualquer condição inicial $P_{\mu, N, N} \succ 0$ e $\mu > 0$ fixado, $\mathbf{P}_k \in$

$\mathbb{H}_+^{n_d}$ converge para a única solução estabilizante $\mathbf{P} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ da equação de Riccati algébrica (24), tal que a matriz em malha fechada $L_{\mu,\bar{i},i}$ em (22), com $i \in \mathcal{S}$ e $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$, do SLSM (7) é estável.

Observação 3. Observe que o resultado apresentado na Proposição 1 pode ser verificado uma vez que (24) se assemelha às equações algébricas de Riccati acopladas clássicas. Desta forma, através de mapeamentos matriciais diretos entre as equações de Riccati, juntamente com os conceitos de estabilizabilidade de (\mathbf{F}, \mathbf{G}) e a detectabilidade de (\mathbf{Q}, \mathbf{F}) , garantem a convergência de \mathbf{P}_k para a solução estabilizante única $\mathbf{P} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ de (24) que estabiliza a matriz de malha fechada $L_{\mu,\bar{i},i}$ em (22) quando $u_k = K_{\mu,\bar{i},i} z_k$.

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, o desempenho do Regulador Recursivo Nominal (Algoritmo 1) é avaliado por meio de um exemplo numérico onde será comparado com outras abordagens apresentadas na literatura.

Considere o SLSMae (1) com quatro modos de operação cujas matrizes de parâmetros, estudadas em Zhang et al. (2008), são dadas por:

$$\begin{aligned} A_{1,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, B_{1,k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1,6 \end{bmatrix}, \\ A_{2,k} &= \begin{bmatrix} 0,92 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, A_{d,2,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, B_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,08 \end{bmatrix}, \\ A_{3,k} &= \begin{bmatrix} 0,77 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, A_{d,3,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, B_{3,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \\ A_{4,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, A_{d,4,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, e B_{4,k} = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$, com a condição inicial $x_0 = [0,2 \ -0,2]^T$ e $\varphi_0(k) = x_0, \forall k \leq 0$. As matrizes de ponderação, definidas em (10), são dadas por

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} \text{ e } R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \\ \forall \bar{\theta}_k &= 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Assume-se que a matriz de probabilidade de transição seja completamente conhecida,

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,19 & 0,01 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \forall i, j \in \mathcal{S}.$$

O atraso aleatório possui os seguintes limitantes: $d_{max} = 10$ e $d_{max} = 15$, com $d_{min} = 1$ e $\Delta d = d_{max}$, para ambos limitantes superiores. Assim, a probabilidade de transição da cadeia de Markov $\bar{\theta}_k$ é dada por:

$$\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{\bar{s}}, \text{ com } \bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1, \forall \bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}.$$

O regulador recursivo proposto (Algoritmo 1) é comparado com duas abordagens baseadas em LMIs: o controlador de sistemas chaveados apresentado em Sun et al., 2006, Teo. 2 e o controlador de sistemas Markovianos proposto por Zhang et al., 2008, Teo. 2, uma vez que essas abordagens consideram um modelo de sistema com chaveamento e atraso aleatório no estado.

Todas as rotinas foram escritas e executadas no software *MATLAB*[®], versão 9.8 (R2020a), utilizando *YALMIP*[®]

Toolbox para resolução das LMIs. Para a inicialização do Algoritmo 1, adotam-se os seguintes parâmetros,

$$\begin{aligned} N &= 50, \pi_0 = 0,25 \times \mathbf{1}_s^T, \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \\ P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} &= I_{n_d} \text{ e } \mu = 10^{16}. \end{aligned}$$

A simulação consiste em realizar $T = 5000$ experimentos de Monte Carlo, no horizonte de tempo $N = 50$. Os modos de operação do sistema θ_k e $\bar{\theta}_k$ são selecionados de acordo com as suas probabilidades de transição, \mathbb{P} e $\bar{\mathbb{P}}$, respectivamente. Além disso, em cada passo de tempo, d_k é um número inteiro sorteado aleatoriamente no intervalo $[d_{min}, d_{max}]$.

Na Tabela 1 são apresentados os valores médios e desvios padrão relativos às normas dos estados e das entradas de controle, denotados por $\|x_k\|$, σ_x , $\|u_k\|$ e σ_u , respectivamente. Os resultados mostram que, apesar da presença do atraso variante no tempo ($d_k \in [1, 10]$), o desempenho em termos das normas dos estados são semelhantes para o RRN (Algoritmo 1) e o controlador de Zhang et al., 2008, Teo. 2. Com relação às normas das entradas de controle, o regulador proposto apresenta um valor maior do que a abordagem proposta em Zhang et al., 2008, Teo. 2, uma vez que a lei de controle proposta considera o vetor de estado aumentado. Por outro lado, o controlador de Sun et al., 2006, Teo. 2 não forneceu um ganho de realimentação de estado capaz de controlar o SLSMae, apresentando uma solução infactível. Por este motivo, não está apresentado na tabela.

Tabela 1. Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_k \in [1, 10]$.

Controladores	$\ x_k\ $	σ_x	$\ u_k\ $	σ_u
RRN (Algoritmo 1)	0,2848	0,0400	0,1552	0,02185
Zhang, 2008, Teo. 2	0,2921	0,0412	0,0950	0,0134

O regulador recursivo proposto regula o SLSM nominal com o atraso de tempo por pelo menos $d_{max} = 15$, com $d_{min} = 1$ e $\Delta d = 15$, enquanto que o limitante máximo de atraso permitido em Zhang et al., 2008, Teo. 2 é $d_{max} = 10$ e, o controlador de Sun et al., 2006, Teo. 2 é infactível para qualquer $d_k \in [1, 15]$, como ilustrado nas Figuras 1 e 2.

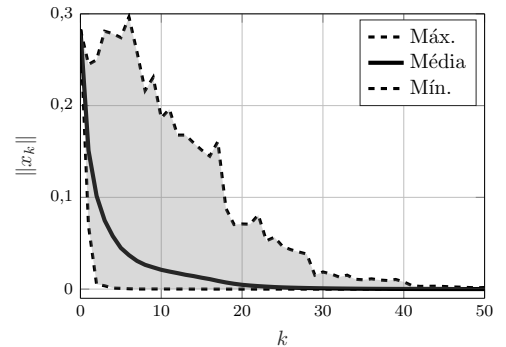


Figura 1. Valores médios das normas dos estados obtidos pelo RRN para o SLSMae quando $d_k \in [1, 15]$.

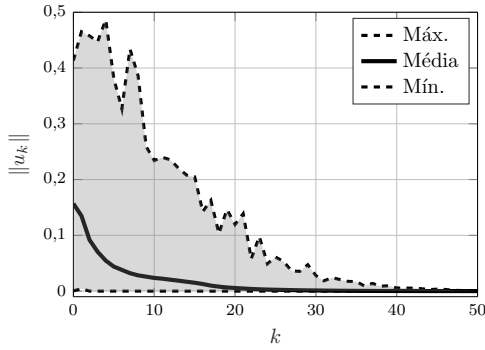


Figura 2. Valores médios das entradas de controle obtidos pelo RRN para o SLSMae quando $d_k \in [1, 15]$.

A Figura 3 ilustra a comutação dos modos de operação das cadeias de Markov θ_k e $\bar{\theta}_k$ correspondente a um dos experimentos mostrado nas Figuras 1 e 2. A permutação ocorre de acordo com as matrizes de probabilidade de transição \mathbb{P} e $\bar{\mathbb{P}}$.

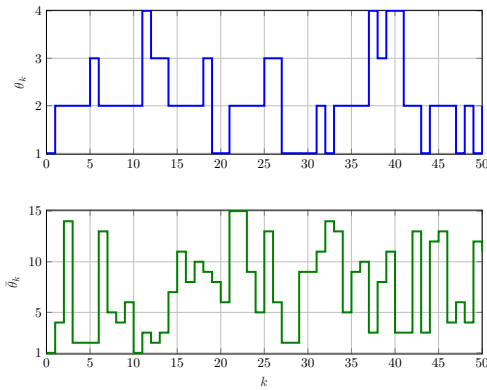


Figura 3. Comutação dos modos de operação do SLSM quando $d_k \in [1, 15]$.

6. CONCLUSÃO

Um regulador recursivo para SLSM com atraso aleatório no estado de tempo discreto é proposto. Por meio da abordagem de sistema aumentado, um SLSM sem atraso governado por duas cadeias de Markov independentes é obtido. Baseado no SLSM aumentado e combinando-o com um parâmetro de penalização, uma lei de controle recursiva é fornecida em termos de equações de Riccati acopladas, que é bem adequada para aplicações online devido à sua recursividade. O exemplo numérico demonstra a eficácia do regulador recursivo proposto em comparação com as abordagens baseadas em LMIs consideradas, apresentando soluções factíveis para diferentes limites de atraso. Em trabalhos futuros, este resultado será estendido para tratar de SLSMae com incertezas politópicas que afetam os parâmetros do modelo.

REFERÊNCIAS

Bertsekas, D.P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific., Massachusetts.
 Cerri, J.P. e Terra, M.H. (2017). Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 6004 – 6011.

Costa, O., Fragoso, M., e Marques, R. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*. Springer-Verlag, New York.
 Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: analysis and control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Basel, Switzerland, 1 edition.
 Hetel, L., Daafouz, J., e Iung, C. (2008). Equivalence between the Lyapunov Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2(3), 697 – 705.
 Ishihara, J.Y., Terra, M.H., e Bianco, A.F. (2010). Recursive linear estimation for general discrete-time descriptor systems. *Automatica*, 46(4), 761–766.
 Kailath, T., Sayed, A.H., e Hassibi, B. (2000). *Deterministic Least-Squares Problems*, chapter 2. Prentice-Hall, New Jersey.
 Kang, Y., Li, Z., Cao, X., e Zhai, D. (2013). Robust control of motion/force for robotic manipulators with random time delays. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(5), 1708–1718.
 Luan, X., Zhao, C., e Liu, F. (2014). Finite-time H_∞ control with average dwell-time constraint for time-delay Markov jump systems governed by deterministic switches. *IET Control Theory & Applications*, 8(11), 968–977.
 Luenberger, D.G. e Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, New York, 3 edition. Chap. 13.
 Nikoukhah, R., Willsky, A.S., e Levy, B.C. (1992). Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1325–1342.
 Qiu, L., Luo, Q., Gong, F., Li, S., e Xu, B. (2013). Stability and stabilization of networked control systems with random time delays and packet dropouts. *Journal of the Franklin Institute*, 350(7), 1886–1907.
 Qiu, L., Shi, Y., Xu, B., e Yao, F. (2015). Robust stochastic stability and delayed-state-feedback stabilisation of uncertain Markovian jump linear systems with random time delays. *IET Control Theory & Applications*, 9(12), 1878–1886.
 Sun, Y.G., Wang, L., e Xie, G. (2006). Delay-dependent robust stability and stabilization for discrete-time switched systems with mode-dependent time-varying delays. *Applied Mathematics and Computation*, 180(2), 428–435.
 Yang, T., Zhang, L., Li, Y., e Leng, Y. (2014). Stabilization of Markov jump linear systems subject to both state and mode detection delays. *IET Control Theory & Applications*, 8(4), 260–266.
 Yao, X., Wang, C., e Zhao, F. (2008). Delay-dependent stability and robust H_∞ control for discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent delays. In *2008 3rd International Conference on Innovative Computing Information and Control*, 420–420.
 Zhang, L., Boukas, E.K., e Lam, J. (2008). Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10), 2458–2464.