

# Estabilidade e Estabilização Poliquadrática com Desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Positivos Nebulosos Tipo-2 Intervalares Chaveados

Rodrigo Possidônio Noronha \* Ginalber Luiz de Oliveira Serra \*\*

\* Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, São Luís, CEP: 65001-970, Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail: rodrigo.pn@discente.ufma.br).

\*\* Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, CEP: 65030-005, Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br).

---

**Abstract:** In this paper, we propose conditions for stability analysis and polyquadratic stabilization for switched interval type-2 fuzzy systems in discrete time. The subsystems of the switched system are defined in intervalar type-2 fuzzy regions, switched according to an arbitrary switching sequence. In addition to the positivity of the system, we consider in the formulations of the problems the performance constraint  $\mathcal{H}_\infty$ . We develop the formulations for the considered problems using a class of switched fuzzy Lyapunov functions. We evaluate the proposed conditions, which are necessary and sufficient conditions for the considered problems, on academic examples where we note the effectiveness of these conditions.

**Resumo:** Neste artigo, propomos condições para análise de estabilidade e estabilização poliquadrática para sistemas nebulosos tipo-2 intervalares chaveados no tempo discreto. Os subsistemas do sistema chaveado são definidos em regiões nebulosas tipo-2 intervalares, chaveados de acordo com uma sequência de chaveamento arbitrária. Além da positividade do sistema, consideramos nas formulações dos problemas a restrição de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Desenvolvemos as formulações para os problemas considerados utilizando uma classe de funções de Lyapunov nebulosas chaveadas. Avaliamos as condições propostas, que são necessárias e suficientes para os problemas considerados, em exemplos acadêmicos onde notamos a eficácia dessas condições.

*Keywords:* Fuzzy Systems; Performance  $\mathcal{H}_\infty$ ; Polyquadratic Stability; Positive Systems; Switched Systems.

*Palavras-chaves:* Estabilidade Poliquadrática; Desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ ; Sistemas Chaveados; Sistemas Nebulosos; Sistemas Positivos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados têm recebido considerável atenção, seja do ponto de vista teórico ou experimental, que é devido ao fato de diferentes classes de sistemas dinâmicos apresentarem características de chaveamento (Lin and Antsaklis, 2009). Essa classe de sistemas possui propriedades dinâmicas que são intrigantes, por exemplo, o chaveamento arbitrário entre subsistemas estáveis pode produzir um sistema chaveado instável (Liberzon, 2003). Sendo assim, considerando uma sequência de chaveamento arbitrária, a estabilidade dos subsistemas é apenas uma condição necessária para a estabilidade do sistema chaveado (Liberzon and Morse, 1999). Uma outra classe de sistemas dinâmicos que tem recebido considerável atenção são os denominados sistemas positivos. Sistemas positivos são aqueles que, dada uma condição inicial positiva, as trajetórias de estados são restringidas a permanecerem não

negativas para todo instante de tempo posterior (Farina and Rinaldi, 2000).

Por sua vez, um sistema positivo chaveado, por definição, é composto de uma família de subsistemas positivos que chaveiam entre si de acordo com uma sequência de chaveamento (Fei et al., 2022). Da mesma forma que para sistemas chaveados, garantir a estabilidade com restrições de desempenho para sistemas positivos chaveados, como exemplo o índice  $\mathcal{H}_\infty$ , é um problema que tem motivado novas investigações (Wang et al., 2023), de tal forma que esse problema se torna bastante interessante quando a sequência de chaveamento é arbitrária.

Tradicionalmente, os subsistemas de um sistema chaveado são definidos em regiões não nebulosas. Para melhor representação das propriedades dinâmicas de cada subsistema, se cada região não nebulosa for particionada em regiões nebulosas, então cada subsistema será definido por um sistema nebuloso. Regiões nebulosas do tipo-2 possuem uma maior eficiência em capturar a evolução temporal da trajetória de estados quando a definição da região nebulosa é incerta, comparado às regiões nebulosas do tipo-1 (De et al., 2022). Assim, é importante investigar o comporta-

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMA, Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão.

mento das propriedades dinâmicas de sistemas positivos chaveados quando os seus subsistemas são definidos em regiões nebulosas do tipo-2.

De acordo com o levantamento bibliográfico realizado, identificamos uma pequena quantidade de métodos de controle para sistemas positivos nebulosos tipo-2 intervalares chaveados. Por exemplo, em Fu et al. (2021) foi tratado o problema de alcançabilidade para sistemas positivos nebulosos tipo-2 intervalares com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  no tempo contínuo. Nesse sentido, no presente artigo propomos, via funções de Lyapunov nebulosas chaveadas, condições necessárias e suficientes para estabilidade e estabilização poliquadrática de sistemas positivos chaveados no tempo discreto. Consideramos que o sistema nebuloso tipo-2 intervalar é chaveado de forma arbitrária, *i.e.*, a sequência de chaveamento é do tipo arbitrária. Além de garantir a estabilidade e estabilização poliquadrática, consideramos a positividade do sistema e o índice  $\mathcal{H}_\infty$  com um dado custo de desempenho. Ao avaliarmos as condições propostas, notamos que quando os problemas considerados nesse artigo são formulados utilizando funções de Lyapunov nebulosas chaveadas, comparadas com outras formas de funções de Lyapunov do tipo quadrática consideradas, as condições de estabilidade e estabilização poliquadráticas propostas são factíveis. Organizamos o artigo da seguinte forma: a formulação do problema é apresentada na Seção 2; os resultados principais desse artigo são apresentados na Seção 3; as simulações computacionais para verificação da eficácia das condições propostas são apresentados na Seção 4; e na Seção 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

**Notação:**  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  denotam uma matriz e vetor com entradas reais, respectivamente.  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{P} < \mathbf{0}$ ) denota uma matriz definida positiva (negativa).  $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$  ( $\mathbf{p} \succ 0$ ) denota uma matriz (vetor) com entradas positivas.  $\mathbb{K}_{\geq 0}$  denota o conjunto de números inteiros não negativos.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Vamos considerar o seguinte sistema não linear chaveado no tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)) \\ \mathbf{z}(k) &= g_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$  denota a entrada de controle,  $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^l$  denota a saída e  $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^q$  denota a perturbação.  $\sigma : \mathbb{K}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{I}$ , com  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ , denota a função de chaveamento e  $N$  denota o número de subsistemas não lineares. As sequências de instantes de chaveamento e de índices de chaveamento são denotadas por  $\{k_j\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\sigma(k_j)\}_{j=0}^\infty$ , respectivamente. Utilizaremos as seguintes considerações em todo o artigo.

**C1.** A cada instante de chaveamento apenas um único subsistema não linear, denotado pelo par  $(f_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k)})$ , está ativo.

**C2.** Não impomos restrições à sequência de chaveamento  $\{(k_0, \sigma(k_0)), (k_1, \sigma(k_1)), \dots\}$ , *i.e.*, a sequência de chaveamento é do tipo arbitrária.

**C3.** Assumimos que o subsistema não linear  $(f_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k)})$  para todo  $\sigma(k) \in \mathcal{I}$  pode ser definido por um sistema nebuloso tipo-2 intervalar em um conjunto compacto.

**C4.** Restringimos a classe de sistemas positivos àqueles onde todas as entradas reais da matriz de estados são positivas.

O  $p$ -ésimo subsistema de (1) é definido por um sistema nebuloso tipo-2 intervalar com a seguinte descrição lógica

$$\begin{aligned} \text{Regra}_p^i : & \text{SE } x_1(k) \in M_{p1}^i \text{ e } \dots \text{ e } x_n(k) \in M_{pn}^i, \\ \text{ENTÃO } & \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{pi} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{pi}^u \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_{pi}^w \mathbf{w}(k) \\ & \mathbf{z}(k) = \mathbf{C}_{pi} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{pi}^u \mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_{pi}^w \mathbf{w}(k), \\ & \forall (i, p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{R}, \text{ com } \mathcal{R} = \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\{M_{p1}^i, \dots, M_{pn}^i\}$  denota a coleção de conjuntos nebulosos tipo-2 intervalares e  $r$  denota o número de regras. As matrizes do  $p$ -ésimo subsistema  $\mathbf{A}_{pi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{pi}^u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B}_{pi}^w \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{C}_{pi} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $\mathbf{D}_{pi}^u \in \mathbb{R}^{l \times m}$  e  $\mathbf{D}_{pi}^w \in \mathbb{R}^{l \times q}$  são constantes e conhecidas, para todo  $i \in \mathcal{R}$ . O valor mapeado pela função grau de pertinência de ativação normalizado pertence ao seguinte intervalo

$$\omega_{pi}(\mathbf{x}(k)) \in [\underline{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k)), \bar{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k))], \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k)) &= \frac{\prod_{\alpha=1}^n \eta_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))}{\sum_{i=1}^r \prod_{\alpha=1}^n \eta_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))} \geq 0 \\ \bar{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k)) &= \frac{\prod_{\alpha=1}^n \bar{\eta}_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))}{\sum_{i=1}^r \prod_{\alpha=1}^n \bar{\eta}_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))} \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

e as funções de pertinências inferiores e superiores são definidas por  $\eta_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))$  e  $\bar{\eta}_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))$ , respectivamente (Zhang et al., 2021). Por definição,  $\bar{\eta}_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k)) \geq \eta_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))$  implicando que  $\bar{\eta}_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k)) \geq \eta_{M_{p\alpha}^i}(x_\alpha(k))$ , para todo  $i \in \mathcal{R}$  e  $k \geq 0$ . O grau de pertinência de ativação normalizado satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} \omega_{pi}(\mathbf{x}(k)) &= \underline{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)) \underline{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k)) + \bar{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)) \bar{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k)) \geq 0 \\ 0 &\leq \underline{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)), \bar{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^p \omega_{pi}(\mathbf{x}(k)) = 1 \\ \underline{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)) &+ \bar{v}_{pi}(\mathbf{x}(k)) = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\underline{v}_{pi}(\mathbf{x}(k))$  e  $\bar{v}_{pi}(\mathbf{x}(k))$  denotam os parâmetros da combinação convexa entre os graus de pertinências inferiores e superiores normalizados,  $\underline{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k))$  e  $\bar{\omega}_{pi}(\mathbf{x}(k))$ .

Utilizando a notação  $\xi_s(k)$  como em Silva et al. (2021), o sistema (1) é definido pela seguinte combinação convexa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) (\mathbf{A}_{si} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{B}_{si}^w \mathbf{w}(k)) \\ \mathbf{z}(k) &= \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) (\mathbf{C}_{si} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{si}^u \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{D}_{si}^w \mathbf{w}(k)). \end{aligned} \quad (6)$$

Com uma notação simplificada, (6) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{x}(k) + \mathcal{B}^u(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathcal{B}^w(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathcal{C}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{x}(k) + \mathcal{D}^u(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathcal{D}^w(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{w}(k), \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}(k) = [\omega_{s1}(\mathbf{x}(k)) \ \omega_{s2}(\mathbf{x}(k)) \ \dots \ \omega_{sr}(\mathbf{x}(k))]$ .

Antes de iniciarmos com os resultados principais desse trabalho, é necessário apresentarmos as seguintes definições.

**Definição 1** (Daafouz and Bernussou, 2001a). A estabilidade poliquadrática de um sistema é verificada através de uma função de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por um mapeamento dependente de parâmetros, tal que as seguintes condições devem ser satisfeitas

- (1)  $V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) = \mathbf{x}^\top(k) \mathbf{P}(\boldsymbol{\beta}(k)) \mathbf{x}(k) > 0$
- (2)  $V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\beta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) < 0$ ,

para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ . O vetor de parâmetros é denotado por  $\boldsymbol{\beta}(k)$ .

**Comentário 1.** A estabilidade poliquadrática é assim chamada devido à função de Lyapunov ser definida por um mapeamento que é quadrático com respeito ao vetor de estados e depender em uma forma politópica de um vetor de parâmetros (Daafouz and Bernussou, 2001a).

**Definição 2** (Farina and Rinaldi, 2000). Um sistema dinâmico é positivo se para uma condição inicial  $\mathbf{x}(0) \succ 0$  implica que a trajetória correspondente  $\mathbf{x}(k) \succeq 0$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Esse resultado é obtido quando a matriz de estados possui todas as entradas reais positivas.

**Definição 3** (Daafouz and Bernussou, 2001b). Um sistema é dito ser poliquadraticamente estável com um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ , se é poliquadraticamente estável e

$$\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}^2(k) < \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}^2(k), \quad \forall \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}^2(k) > 0, \quad (8)$$

com  $\mathbf{z}(k) \in l_2[0, \infty)$  e  $\mathbf{w}(k) \in l_2[0, \infty)$ .

Estamos interessados em responder na próxima seção os seguintes questionamentos: (i) o sistema nebuloso tipo-2 intervalar chaveado arbitrariamente (6) é poliquadraticamente estável, positivo e possui um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ ; (ii) o sistema nebuloso tipo-2 intervalar chaveado arbitrariamente (6) é poliquadraticamente estável, positivo e possui um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ .

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção fornecemos condições suficientes e necessárias para os problemas tratados nesse trabalho. As condições serão desenvolvidas utilizando funções de Lyapunov nebulosas chaveadas definidas por

$$V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \mathbf{x}^\top(k) \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) \mathbf{x}(k), \quad (9)$$

onde  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{P}_{si}$ , com  $\mathbf{0} < \mathbf{P}_{si} = \mathbf{P}_{si}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

A estabilidade poliquadrática, considerando  $\mathbf{u}(k) \equiv \mathbf{0}$ , com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ , é reduzida à existência de  $V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$  solução de

$$V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\omega}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) + \gamma^{-1} \|\mathbf{z}(k)\|^2 - \gamma \|\mathbf{w}(k)\|^2 < 0. \quad (10)$$

Desenvolvendo (10), obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top(k) & \mathbf{w}^\top(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{w}(k) \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \mathcal{A}^\top \mathcal{P}_+ \mathcal{A} - \mathcal{P} + \gamma^{-1} \mathcal{C}^\top \mathcal{C}^\top \\ \mathbf{M}_{12} &= \mathcal{A}^\top \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w + \gamma^{-1} \mathcal{C}^\top \mathcal{D}^w, \quad \mathbf{M}_{21} = (\mathbf{M}_{12})^\top \\ \mathbf{M}_{22} &= (\mathcal{B}^w)^\top \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w + \gamma^{-1} (\mathcal{D}^w)^\top \mathcal{D}^w - \gamma \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (12)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{A}_{si} \\ \mathcal{B}^w &= \mathcal{B}^w(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{B}_{si}^w \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{C}_{si} \\ \mathcal{D}^w &= \mathcal{D}^w(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{D}_{si}^w \\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{P}_{si} \\ \mathcal{P}_+ &= \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\omega}(k+1)) = \sum_{c=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_c(k) \omega_{ci}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{P}_{ci}. \end{aligned} \quad (13)$$

Por fim, (11) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}^w \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathcal{P}_+^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (14)$$

#### 3.1 Problema de Estabilidade Poliquadrática

No seguinte teorema apresentaremos condições que permitem certificar a estabilidade poliquadrática do sistema (6), positividade e desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ .

**Teorema 1.** O sistema (6) é poliquadraticamente estável, positivo e com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ , se, e somente, se existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_{si} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes  $\mathbf{G}_{si} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  soluções das seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{G}_{si}^\top - \mathbf{S}_{si} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \star & \star \\ \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{S}_{ci} & \star \\ \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{D}_{si}^w & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (15a)$$

$$\mathbf{A}_{si} \succ \mathbf{0}, \quad (15b)$$

para todo  $(s, c) \in \mathcal{I}$  e  $i \in \mathcal{R}$ . Ainda, definimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{S}_{si}^{-1} \\ \mathcal{P}_+ &= \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\omega}(k+1)) = \sum_{c=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_c(k) \omega_{ci}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{S}_{ci}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

**Prova.** Tomaremos alguns procedimentos semelhantes aos utilizados por Daafouz and Bernussou (2001b).

*Suficiência:* Para provarmos a suficiência, assumimos que (15a) é factível. Então, temos que

$$\mathbf{G}_{si} + \mathbf{G}_{si}^\top - \mathbf{S}_{si} > \mathbf{0}. \quad (17)$$

Dessa forma,  $\mathbf{G}_{si}$  possui posto completo e como  $\mathbf{0} < \mathbf{S}_{si} = (\mathbf{S}_{si})^\top$ , obtemos

$$\mathbf{G}_{si}^T \mathbf{S}_{si}^{-1} \mathbf{G}_{si} \geq \mathbf{G}_{si} + \mathbf{G}_{si}^T - \mathbf{S}_{si}. \quad (18)$$

Sendo assim, (15a) é reescrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{S}_{si}^{-1} \mathbf{G}_{si} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \star & \star \\ \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{S}_{ci} & \star \\ \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{D}_{si}^w & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (19)$$

Pelo complemento de Schur, (15a) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \star & \star \\ -\gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} & \gamma \mathbf{I} - \gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{D}_{si}^w & \star \\ \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{S}_{ci} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (20)$$

onde  $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{S}_{si}^{-1} \mathbf{G}_{si} - \gamma^{-1} \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{C}_{si}^T \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si}$ .

Novamente, pelo complemento de Schur, (20) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \star \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{11} &= \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{S}_{si}^{-1} \mathbf{G}_{si} - \gamma^{-1} \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{C}_{si}^T \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} \\ &\quad - \mathbf{G}_{si}^T \mathbf{A}_{si}^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} \\ \mathbf{N}_{21} &= -\gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} - (\mathbf{B}_{si}^w)^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{N}_{22} = \gamma \mathbf{I} - \gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{D}_{si}^w - (\mathbf{B}_{si}^w)^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{B}_{si}^w,$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \star \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{si} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} &= \mathbf{A}_{si}^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{A}_{si} - \mathbf{S}_{si}^{-1} + \gamma^{-1} \mathbf{C}_{si}^T \mathbf{C}_{si} \\ \mathbf{F}_{21} &= (\mathbf{B}_{si}^w)^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{A}_{si} + \gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{C}_{si}^T \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_{22} = (\mathbf{B}_{si}^w)^T \mathbf{S}_{ci}^{-1} \mathbf{B}_{si}^w + \gamma^{-1} (\mathbf{D}_{si}^w)^T \mathbf{D}_{si}^w - \gamma \mathbf{I}.$$

Como  $\mathbf{P}_{ci} = \mathbf{S}_{si}^{-1}$  e  $\mathbf{P}_{ci} = \mathbf{S}_{ci}^{-1}$ , temos que (23) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ci} \mathbf{A}_{si} & \mathbf{P}_{ci} \mathbf{B}_{si}^w \\ \mathbf{C}_{si} & \mathbf{D}_{si}^w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ci}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ci} \mathbf{A}_{si} & \mathbf{P}_{ci} \mathbf{B}_{si}^w \\ \mathbf{C}_{si} & \mathbf{D}_{si}^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{si} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (25)$$

Multiplicando todos os blocos de matrizes em (25) por seus respectivos vetores de graus de pertinências de ativação normalizados e, por  $\xi_s(k)$  e  $\xi_c(k)$ , e após realizar os somatórios, obtemos que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}^w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_+^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ \mathcal{B}^w \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (26)$$

que é a mesma desigualdade matricial obtida em (14). A prova da suficiência está completa.

*Necessidade:* Para provar a necessidade, assumimos que (14) é factível. É importante notar que (14) é equivalente a (25), que pode então convenientemente ser reescrita de uma forma compacta

$$\tilde{\mathbf{A}}_{cisi}^T \tilde{\mathbf{P}}_{ci} \tilde{\mathbf{A}}_{cisi} - \tilde{\mathbf{P}}_{si} < \mathbf{0}, \quad (27)$$

onde  $\tilde{\mathbf{A}}_{cisi} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ci} \mathbf{A}_{si} & \mathbf{P}_{ci} \mathbf{B}_{si}^w \\ \mathbf{C}_{si} & \mathbf{D}_{si}^w \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ci}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}$ , e  $\tilde{\mathbf{P}}_{si} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{si} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}$ , para todo  $(c, s) \in \mathcal{I}$  e  $i \in \mathcal{R}$ .

Para o restante da prova da necessidade, um procedimento similar ao proposto por Daafouz and Bernussou (2001b) pode ser utilizado para provar que (27) implica em (15a). Com respeito à positividade, para que o sistema (5) seja positivo, de acordo com a **Definição 2** e considerando  $\mathbf{u}(k) \equiv \mathbf{0}$ , todas as entradas da matriz  $\mathbf{A}_{si}$  devem ser positivas., *i.e.*,  $\mathbf{A}_{si} \succ \mathbf{0}$ .

### 3.2 Problema de Estabilização Poliquadrática

Assumiremos que a função de controle é definida por

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^r \xi_s(k) \omega_{si}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{K}_{si} \mathbf{x}(k), \quad (28)$$

onde  $\mathbf{K}_{si}$  denota a matriz de ganhos de realimentação de estados. No seguinte teorema apresentaremos condições que garantem a estabilização poliquadrática do sistema (6), positividade e desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ .

**Teorema 2.** O sistema (6) é poliquadraticamente estabilizável, positivo, com um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ , se e somente se, existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_{si} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes  $\mathbf{G}_{si} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{R}_{sj} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  soluções das seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{G}_{si}^T - \mathbf{S}_{si} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \star & \star \\ \mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{R}_{sj} & \mathbf{B}_{si}^w & \mathbf{S}_{ci} & \star \\ \mathbf{C}_{si} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{D}_{si}^u \mathbf{R}_{sj} & \mathbf{D}_{si}^w & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (29a)$$

$$\mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{R}_{sj} \succ \mathbf{0}, \quad (29b)$$

para todo  $(s, c) \in \mathcal{I}$  e  $(i, j) \in \mathcal{R}$ . A matriz de ganhos de realimentação de estados é definida por  $\mathbf{K}_{sj} = \mathbf{R}_{sj} \mathbf{G}_{si}^{-1}$ .

**Prova.** A prova do Teorema 2 segue diretamente da prova do Teorema 1 por substituir  $\mathbf{A}_{si}$  por  $\mathbf{A}_{si} + \mathbf{B}_{si} \mathbf{K}_{sj}$  e fazendo  $\mathbf{K}_{sj} = \mathbf{R}_{sj} \mathbf{G}_{si}^{-1}$ . A não singularidade da matriz de folga  $\mathbf{G}_{si}$  é garantida uma vez que  $\mathbf{G}_{si} + \mathbf{G}_{si}^T > \mathbf{S}_{si} > \mathbf{0}$ . Além disso, é garantido que  $\mathbf{G}_{si}$  é definida positiva. Com respeito à positividade do sistema (6), multiplicando (29b) à direita por  $\mathbf{G}_{si}^{-1}$ , obtemos

$$\mathbf{A}_{si} + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{R}_{sj} \mathbf{G}_{si}^{-1} \succ \mathbf{0}, \quad (30)$$

resultando em

$$\mathbf{A}_{si} + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{K}_{sj} \succ \mathbf{0}. \quad (31)$$

Portanto, o sistema (6) será positivo se  $\mathbf{A}_{si} \mathbf{G}_{si} + \mathbf{B}_{si}^u \mathbf{R}_{sj} \succ \mathbf{0}$ , *i.e.*, implicando que todas as entradas da matriz de estados em malha fechada são positivas.

## 4. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Nesta seção, apresentaremos os resultados computacionais obtidos para verificação da eficácia das condições propostas. As condições propostas na forma de LMIs foram implementadas e solucionadas em MATLAB (R2022a), através do *parser* YALMIP (Lofberg, 2004) e *solver* SEDUMI 1.3 (Sturm et al., 2006).

#### 4.1 Resultados Computacionais de Análise de Estabilidade

Considere um sistema nebuloso tipo-2 intervalar chaveado definido pelos seguintes subsistemas

**Subsistema 1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} a_{111} & -0,315 \\ 0,63 & -0,84 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,52 & 0,77 \\ -0,7 & -0,07 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{11}^w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{12}^w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,4 \end{bmatrix} & D_{11}^w &= 0 & D_{12}^w &= 0 \\ \mathbf{C}_{11} &= [1 \ 1,2] & \mathbf{C}_{12} &= [1 \ 1,4]. \end{aligned} \quad (32)$$

**Subsistema 2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,35 & -0,285 \\ 0,43 & a_{222} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,72 & 0,57 \\ -0,4 & -0,11 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{21}^w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{22}^w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6 \end{bmatrix} & D_{21}^w &= 0 & D_{22}^w &= 0 \\ \mathbf{C}_{21} &= [1 \ 1] & \mathbf{C}_{22} &= [1 \ 1,5]. \end{aligned} \quad (33)$$

A análise de estabilidade poliquadrática, positividade e desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$  foi realizada considerando as funções de Lyapunov quadráticas definidas por  $V_1(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}_1\mathbf{x}(k)$ ;  $V_2(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}_2(\boldsymbol{\xi}(k))\mathbf{x}(k)$ ;  $V_3(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}_3(\boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{x}(k)$ ;  $V_4(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}_4(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{x}(k)$ , onde  $\mathbf{P}_2(\boldsymbol{\xi}(k)) = \sum_{s=1}^N \xi_s(k)\mathbf{P}_s$ ,  $\mathbf{P}_3(\boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{i=1}^r \omega_i(k)\mathbf{P}_i$  e  $\mathbf{P}_4(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \xi_s(k)\omega_{si}(k)\mathbf{P}_{si}$ . É importante notar que reescrevendo a condição (15a) do Teorema 1, dada a função de Lyapunov definida por  $V_1(\mathbf{x}(k))$ , implica na estabilidade quadrática com um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um custo  $\gamma > 0$ . A função de Lyapunov definida por  $V_2(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k))$  é chaveada; a função de Lyapunov definida por  $V_3(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$  é nebulosa; a função de Lyapunov definida por  $V_4(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$  é nebulosa chaveada, implicando exatamente na condição (15a).

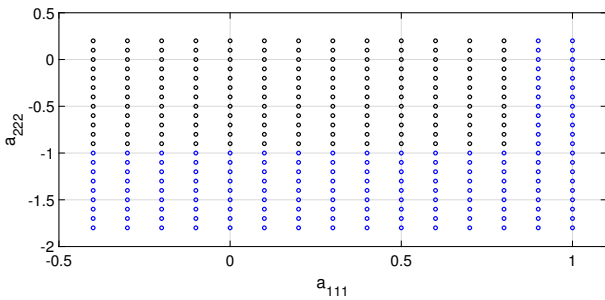


Figura 1. Região de factibilidade (o) e de não factibilidade (o) obtida por  $V_4(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ .

De acordo com a condição (15b) do Teorema 1, considerando  $a_{111} = 0,28$  e  $a_{222} = -0,34$ , o sistema (32)-(33) é não positivo. Com respeito à análise de estabilidade poliquadrática dado um valor mínimo de custo  $\gamma = 6,15$  (definido por tentativa e erro levando em consideração a factibilidade da condição (15a)) para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , a condição (15a) não é factível por meio das funções de Lyapunov definidas por  $V_1(\mathbf{x}(k))$ ,  $V_2(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k))$  e  $V_3(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ , considerando  $a_{111} = 0,28$  e  $a_{222} = -0,34$ . Por outro lado, a condição (15a) é factível para o sistema

(32)-(33) por meio da função de Lyapunov definida por  $V_4(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ , no qual obtivemos as seguintes matrizes de Lyapunov

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,9305 & -0,4764 \\ -0,4764 & 1,1034 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,6180 & 0,2636 \\ 0,2636 & 0,8292 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,6347 & -0,0595 \\ -0,0595 & 0,4862 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,5366 & 0,3950 \\ 0,3950 & 0,6974 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Na Figura 1, considerando a dupla  $(a_{111}, a_{222})$  para todo  $a_{111} \in [-0,4, 1]$  e para todo  $a_{222} \in [-1,8, 0,2]$ , mostramos as regiões de factibilidade da condição (15a) do Teorema 1 para estabilidade poliquadrática com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um valor mínimo de custo  $\gamma = 6,15$ , por meio da função de Lyapunov nebulosa chaveada definida por  $V_4(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ . Notamos que para os valores da dupla  $(a_{111}, a_{222})$  considerados não foi possível obter a factibilidade da condição (15a) do Teorema 1 por meio das funções de Lyapunov definidas por  $V_1(\mathbf{x}(k))$ ,  $V_2(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k))$  e  $V_3(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ , respectivamente.

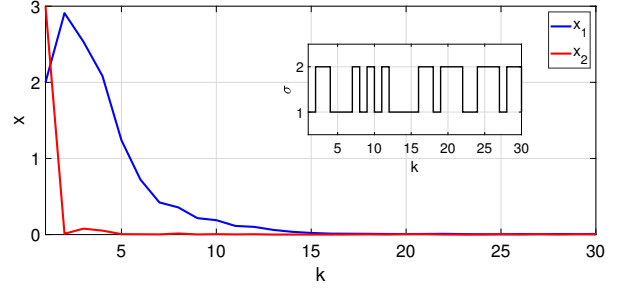


Figura 2. Evolução temporal da trajetória de estados  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$ .

#### 4.2 Resultados Computacionais de Estabilização

Considere um sistema nebuloso tipo-2 intervalar chaveado definido pelos seguintes subsistemas

**Subsistema 1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,58 & -0,315 \\ 0,63 & -0,84 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,78 & 0,315 \\ 0,63 & -0,84 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{11}^u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{12}^u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{11}^w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{12}^w &= \begin{bmatrix} 0,7 \\ 2,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{11} &= [1 \ 1,5] & \mathbf{C}_{12} &= [1,2 \ 1,3] \end{aligned}$$

$$D_{11}^u = 1,1 \quad D_{12}^u = 1,2 \quad D_{11}^w = 1 \quad D_{12}^w = 1. \quad (35)$$

**Subsistema 2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,52 & 0,77 \\ -0,7 & -0,07 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,12 & 0,27 \\ -0,7 & -0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{21}^u &= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{22}^u &= \begin{bmatrix} -1 \\ 7,5 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{21}^w &= \begin{bmatrix} 1,7 \\ 1,4 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{22}^w &= \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{21} &= [0,6 \ 1] & \mathbf{C}_{22} &= [0,7 \ 0,9] \end{aligned}$$

$$D_{21}^u = 0,5 \quad D_{22}^u = 0,7 \quad D_{21}^w = 1 \quad D_{22}^w = 1. \quad (36)$$

As funções de pertinências superiores e inferiores normalizadas são definidas por  $\underline{\omega}_{11}(x_1(k)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(k)+8)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_{11}(x_1(k)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(k)+6)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_{12}(x_1(k)) = 1 - \bar{\omega}_{11}(x_1(k))$ ,  $\underline{\omega}_{12}(x_1(k)) = 1 - \underline{\omega}_{11}(x_1(k))$ ,  $\underline{\omega}_{21}(x_1(k)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(k)+8,7)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_{21}(x_1(k)) = 1 - (1 + e^{-(x_1(k)+6,7)})^{-1}$ ,  $\bar{\omega}_{22}(x_1(k)) = 1 - \bar{\omega}_{21}(x_1(k))$  e  $\underline{\omega}_{22}(x_1(k)) = 1 - \underline{\omega}_{21}(x_1(k))$ .

As funções de parâmetros da combinação convexa entre os graus de pertinências superiores e inferiores normalizados são definidas por

$$\begin{aligned} \bar{v}_{11}(x_1(k)) &= \text{sen}^2(x_1(k)) & \underline{v}_{11}(x_1(k)) &= 1 - \bar{v}_{11}(x_1(k)) \\ \bar{v}_{21}(x_1(k)) &= \text{sen}^2(x_1(k)) & \underline{v}_{21}(x_1(k)) &= 1 - \bar{v}_{21}(x_1(k)). \end{aligned} \quad (37)$$

As funções graus de pertinências de ativação normalizados são definidas por

$$\begin{aligned} \omega_{11}(x_1(k)) &= \bar{\omega}_{11}(x_1(k))\kappa_{11}(x_1(k)) + \underline{\omega}_{11}(x_1(k))\bar{v}_{11}(x_1(k)) \\ \omega_{21}(x_1(k)) &= \bar{\omega}_{21}(x_1(k))\kappa_{21}(x_1(k)) + \underline{\omega}_{21}(x_1(k))\bar{v}_{21}(x_1(k)) \\ \omega_{12}(x_1(k)) &= 1 - \omega_{11}(x_1(k)), & \omega_{22}(x_1(k)) &= 1 - \omega_{21}(x_1(k)), \end{aligned} \quad (38)$$

onde  $\kappa_{11}(x_1(k)) = (1 - \bar{v}_{11}(x_1(k)))$  e  $\kappa_{21}(x_1(k)) = (1 - \bar{v}_{21}(x_1(k)))$ .

Previamente, de acordo com a condição (29b), notamos que o sistema (35)-(36) é não positivo. Para os resultados computacionais de estabilização poliquadrática, dado um valor mínimo de custo  $\gamma = 18$  (definido por tentativa e erro levando em consideração a factibilidade da condição (29a)) para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , a condição (29a) do Teorema 2 para o sistema (35)-(36) é factível. Sendo assim, obtivemos as matrizes de ganhos de realimentação de estados  $\mathbf{K}_{11} = [-0,2962 \ 0,4616]$ ,  $\mathbf{K}_{12} = [-0,2856 \ 0,3826]$ ,  $\mathbf{K}_{21} = [0,5423 \ 0,0913]$  e  $\mathbf{K}_{22} = [0,4125 \ 0,1185]$ , e as seguintes matrizes de Lyapunov

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,1068 & 0,0546 \\ 0,0546 & 0,4174 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,1843 & 0,1357 \\ 0,1357 & 0,2745 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,4109 & 0,2230 \\ 0,2230 & 0,3185 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,2222 & 0,1455 \\ 0,1455 & 0,2155 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

A condição inicial, satisfazendo a **Definição 2**, foi definida por  $0 < \mathbf{x}(0) = [2 \ 3]^T$ . A função de perturbação foi definida por uma sequência aleatória com distribuição normal<sup>1</sup>. Na Figura 2, mostramos a evolução temporal da trajetória de estados. Notamos que, além de garantir a estabilização poliquadrática com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado um valor de mínimo de custo, através das matrizes de ganhos de realimentação de estados obtidas, as matrizes de estados em malha fechada satisfazem a condição de positividade (29b), *i.e.*, a trajetória de estados  $\mathbf{x}(k) \succeq 0$  para todo  $k \in \mathbb{K}_{>0}$ .

## 5. CONCLUSÃO

Nesse artigo, propomos um método de controle para sistemas positivos nebulosos tipo-2 intervalares chaveados de

<sup>1</sup> Para obter a sequência aleatória com distribuição normal da perturbação utilizamos a função *rand* do MATLAB.

forma arbitrária para o problema de estabilidade e estabilização poliquadrática com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . As condições que propomos são necessárias e suficientes para os problemas considerados. Embora as condições propostas sejam formuladas utilizando funções de Lyapunov nebulosas chaveadas, que são mais complexas quando comparadas às funções de Lyapunov quadráticas consideradas na seção de resultados, notamos que essas condições são factíveis. Além de garantir a estabilidade e estabilização poliquadrática do sistema com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , obtivemos a positividade do sistema nebuloso tipo-2 intervalar chaveado.

## REFERÊNCIAS

- Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001a). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5), 355–359.
- Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001b). Poly-quadratic stability and h/sub/spl infin//performance for discrete systems with time varying uncertainties. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, 267–272. IEEE.
- De, A.K., Chakraborty, D., and Biswas, A. (2022). Literature review on type-2 fuzzy set theory. *Soft Computing*, 26(18), 9049–9068.
- Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems: theory and applications*, volume 50. John Wiley & Sons.
- Fei, Z., Chen, W., and Zhao, X. (2022). Interval estimation for asynchronously switched positive systems. *Automatica*, 143, 110427.
- Fu, L., Lam, H.K., Liu, F., Zhou, H., and Zhong, Z. (2021). Robust tracking control of interval type-2 positive takagi–sugeno fuzzy systems with external disturbance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(10), 4057–4068.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, volume 190. Springer.
- Liberzon, D. and Morse, A.S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5), 59–70.
- Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic control*, 54(2), 308–322.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 284–289. IEEE.
- Silva, F.A., Pessim, P.S., and Lacerda, M.J. (2021). Controle de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo: uma abordagem usando função de lyapunov aumentada. In *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI*, volume 1.
- Sturm, J., Polik, I., and Terlaky, T. (2006). Sedumi 1.3. *URL* <http://sedumi.ie.lehigh.edu>, 10, 126.
- Wang, P., Sang, H., and Niu, B. (2023). Novel criteria for stability and l1-gain analysis of switched positive time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Zhang, L., Sun, Y., Lam, H.K., Li, H., Wang, J., and Hou, D. (2021). Guaranteed cost control for interval type-2 fuzzy semi-markov switching systems within a finite-time interval. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(7), 2583–2594.