

# Estabilidade global de sistemas lineares positivos sujeitos a saturação nos atuadores <sup>★</sup>

Amanda Spagolla, \* Giorgio Valmorbida, \*\* Cecília F. Morais, \*\*\*  
Ricardo C. L. F. Oliveira, \* Pedro L. D. Peres \*

\* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil. (e-mail: {spagolla,ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br.)*

\*\* *Laboratoire des Signaux et Systèmes, CentraleSupélec, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 3 Rue Joliot-Curie, Gif-sur-Yvette 91192, França (e-mail: giorgio.valmorbida@centralesupelec.fr)*

\*\*\* *Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC-Campinas), Programa de Pós Graduação em Gestão de Redes de Telecomunicações, 13086-900, Campinas, SP, Brasil (e-mail: cecilia.morais@puc-campinas.edu.br)*

---

**Abstract:** This paper proposes a more accurate characterization for the global stability of positive linear systems subject to saturation in the actuators. Exploring the description of saturation by means of the ramp function, that is positive for positive inputs, and the copositivity of quadratic forms, sufficient conditions for the global stability are given in terms of linear matrix inequalities for continuous- and discrete-time systems. Numerical comparisons with other techniques from the literature based on sector conditions are made to illustrate the effectiveness of the new proposed conditions.

**Resumo:** Este artigo propõe uma caracterização mais precisa para a estabilidade global de sistemas lineares positivos sujeitos a saturação nos atuadores. Explorando a descrição de saturação por meio da função rampa, que é positiva para entradas positivas, e a copositividade de formas quadráticas, condições suficientes para a estabilidade global são dadas em termos de desigualdades matriciais lineares para sistemas contínuos e discretos no tempo. Comparações numéricas com outras técnicas da literatura baseadas em condições de setor são feitas para ilustrar a eficácia das novas condições propostas.

*Keywords:* Saturation; Positive systems; Discrete-time systems, Continuous-time systems; Linear matrix inequalities; Global stability.

*Palavras-chaves:* Saturação; Sistemas positivos; Sistemas discretos no tempo; Sistemas contínuos no tempo; Desigualdades matriciais lineares; Estabilidade global.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas cujas variáveis de estado assumem apenas valores não-negativos são chamados de sistemas positivos (veja a referência clássica Luenberger (1979)). Estes sistemas estão presentes em uma vasta gama de problemas de engenharia como, por exemplo, redes de tráfego, de energia e processos químicos (Farina and Rinaldi, 2000; Rantzer and Valcher, 2018). Paralelamente, um fenômeno comumente encontrado em sistemas de controle industrial é a saturação nos atuadores, pois todo atuador possui limitação física (Yin et al., 2018). Porém, independentemente da saturação ser originada por restrições advindas de limitações tecnológicas ou de requisitos de segurança, a análise e o

projeto de um sistema que contém não linearidades do tipo saturação são problemas de difícil solução teórica, e que atraíram muitos esforços de pesquisa nas últimas décadas. Vale ressaltar que a saturação no atuador pode degradar o desempenho e até causar a instabilidade dos sistemas (Hu and Lin, 2001; Tarbouriech et al., 2011; Yin et al., 2018).

De acordo com Tarbouriech et al. (2011) existem três abordagens principais para lidar com os problemas de saturação. A primeira usa técnicas de controle ótimo para sintetizar um controlador que contenha as restrições de saturação, com condições frequentemente formuladas em termos de equações de Riccati e Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*) parametrizadas. Na segunda abordagem projeta-se um compensador *anti-windup*<sup>1</sup> para compensar o controlador projetado sem considerar a saturação. Por fim, o último

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do CNPq e da FAPESP (Processo 2019/09363-5). Apoiado em parte pelo Projeto Stic-Amsud/CAPES NetConHybSDP, code 22-STIC-09.

<sup>1</sup> O termo *windup* descreve diferenças entre a saída e a entrada do atuador ocasionadas quando o sinal de controle atinge um limite físico (saturação).

método corresponde ao emprego das estratégias de controle preditivo de modelo.

Diferentemente das técnicas mencionadas, neste trabalho utiliza-se a representação da saturação em termos da função rampa (Primlos and Giannelli, 2001), ou seja,  $f(\alpha) = \alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , e  $f(\alpha) = 0$ ,  $\alpha < 0$ . Com isso, pode-se explorar a não negatividade característica dessa função e formular condições de estabilidade que exploram a copositividade de matrizes. Atualmente é possível testar a copositividade de uma matriz utilizando relaxações LMIs com precisão arbitrária. Embora seja possível considerar diferentes tipos de funções de Lyapunov, como poliedrais, do tipo Lur'e, quadrática por partes (Groff et al., 2023), neste estudo, por simplicidade, apenas funções de Lyapunov quadráticas nos estados são consideradas para análise de estabilidade. Ademais, o uso de funções quadráticas permite uma comparação mais justa com os métodos baseados nas condições de setor, o que evidencia as melhorias obtidas pelo uso das condições propostas. Essas melhorias são ilustradas por meio de experimentos numéricos envolvendo sistemas positivos com diferentes ordens e número de entradas.

*Notação:* Uma matriz real  $X$  com  $n$  linhas e  $m$  colunas é denotada por  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $X'$  designa a transposta e  $\text{He}(X) = X + X'$ . O conjunto das matrizes diagonais é designado por  $\mathbb{D}$  e o conjunto de matrizes Metzler é denotado por  $\mathbb{M}$ . Matrizes simétricas definidas positivas (negativas) são denotadas por  $X = X' \succ 0$  ( $X = X' \prec 0$ ), enquanto  $X = X' \succeq 0$  ( $X = X' \preceq 0$ ) é usado para matrizes simétricas semidefinidas. A notação  $X \geq 0$  indica  $X = [x_{ij}]$ ,  $x_{ij} \geq 0$ ,  $\forall(i, j)$ . A matriz identidade e a matriz de zeros, com dimensões apropriadas, são dadas por  $I$  e  $0$ , respectivamente. O símbolo  $\star$  representa um bloco simétrico em uma matriz quadrada.

## 2. PRELIMINARES

Esta seção reúne as principais definições e fundamentos necessários para desenvolver os resultados deste artigo.

### 2.1 Fundamentos de Sistemas Positivos

Nesta seção são lembradas algumas definições clássicas de sistemas positivos. Para mais informações, veja Farina and Rinaldi (2000); Rantzer (2015).

*Definição 1.* Um sistema é (internamente) positivo se os estados e as saídas são ambos não negativos para qualquer estado inicial não negativo e entrada não negativa.

*Definição 2.* Uma matriz quadrada  $A$  é dita Metzler ( $A \in \mathbb{M}$ ) se os elementos fora da diagonal principal de  $A = [a_{ij}]$  são não negativos, isto é,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\forall(i, j)$ ,  $i \neq j$ .

Na sequência, são apresentados lemas sobre a positividade (interna) de um sistema linear estritamente próprio com realização em espaço de estados  $(A, B, C)$  para os casos contínuo e discreto no tempo, respectivamente (Farina and Rinaldi, 2000).

*Lema 1.* Um sistema linear contínuo no tempo com realização  $(A, B, C)$  é positivo se, e somente se,  $A \in \mathbb{M}$ ,  $B \geq 0$  e  $C \geq 0$ .

*Lema 2.* Um sistema linear discreto no tempo com realização  $(A, B, C)$  é positivo se, e somente se,  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  e  $C \geq 0$ .

Além disso, as condições de estabilidade assintótica para sistemas positivos são dadas pelos seguintes lemas (Farina and Rinaldi, 2000).

*Lema 3.* Um sistema linear positivo de tempo contínuo é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz  $0 \prec P \in \mathbb{D}$ , tal que

$$A'P + PA \prec 0. \quad (1)$$

*Lema 4.* Um sistema linear positivo de tempo discreto é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz  $0 \prec P \in \mathbb{D}$ , tal que

$$A'PA - P \prec 0. \quad (2)$$

### 2.2 Relaxações na Copositividade

Se para valores não negativos de  $x$  a forma quadrática  $x'Mx$  assume apenas valores não negativos, a matriz real  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita *copositiva*, como dado pela definição a seguir (Väliaho, 1986).

*Definição 3.* Uma matriz  $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é copositiva se  $x'Mx \geq 0$  para qualquer  $x \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Uma matriz copositiva é denominada estritamente copositiva se  $x \geq 0$  e  $x'Mx = 0$  implica em  $x = 0$ .

Embora, de acordo com Parrilo (2000), verificar a copositividade de uma matriz seja um problema co-NPC (co-NP-completo, consulte Corman et al. (2009) como referência sobre complexidade computacional), condições suficientes podem ser estabelecidas em termos de relaxações baseadas em programação semidefinida para determinar a copositividade de matrizes reais. A seguir, são apresentadas três destas relaxações (Parrilo, 2000).

*Lema 5.* Uma matriz  $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M = [m_{ij}]$ , é copositiva se  $m_{ij} \geq 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, n$ .

*Lema 6.* Se existirem uma matriz  $0 \preceq P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $M_0 = M_0' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_0 = [m_{0ij}]$ , com  $m_{0ij} \geq 0$ , então a matriz  $M = P + M_0$  é copositiva.

*Lema 7.* Se existir uma solução factível para o sistema de equações e desigualdades dado por

$$\begin{aligned} M - \Omega^i &\geq 0, \\ \omega_{ii}^i &= 0, \\ \omega_{jj}^i + \omega_{ji}^j + \omega_{ij}^j &= 0, \quad i \neq j, \\ \omega_{jk}^i + \omega_{ki}^j + \omega_{ij}^k &\geq 0, \quad i \neq j \neq k, \end{aligned} \quad (3)$$

com  $\Omega^i = \Omega^{i'} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Omega^i = [\omega_{jk}^i]$ , então  $M$  é copositiva.

Conforme exposto em Parrilo (2000), as condições dos lemas 5 e 6 são equivalentes e, embora o Lema 7 seja menos conservador do que os anteriores, a complexidade da resolução é maior, visto que requer mais variáveis e restrições.

### 2.3 Saturação nos Atuadores: Condição de Setor

O problema de análise de estabilidade para sistemas de controle lineares com saturação na entrada pode ser tratado usando o modelo de não linearidade setorial para representar o sistema de malha fechada saturado

$$\delta[x] = Ax + B \text{sat}[u_{min}, u_{max}](u) \quad (4)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  as entradas de controle e  $\delta[x]$  corresponde ao operador

avanço para sistemas discretos e à derivada para sistemas contínuos no tempo. A notação  $\text{sat}[u_{\min}, u_{\max}](u)$  indica que cada componente do sinal de controle  $u_i$  está restrita ao intervalo  $[u_{\min_i}, u_{\max_i}]$ , com  $u_{\min_i} < 0$  e  $u_{\max_i} > 0$  conhecidos,  $i = 1, \dots, n_u$ .

Na sequência, são apresentados lemas para a estabilidade global do sistema em malha fechada (4), considerando a realimentação de estados  $u = Kx$ , para os casos de tempo contínuo e discreto (Tarbouriech et al., 2011), respectivamente.

**Lema 8.** Se existirem uma matriz  $0 \prec W = W' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e uma matriz  $0 \prec S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $S \in \mathbb{D}$ , que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} W(A+BK)' + (A+BK)W & BS - WK' \\ \star & -2S \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5)$$

então a origem é globalmente assintoticamente estável para o sistema saturado (4) no tempo contínuo.

**Lema 9.** Se existirem uma matriz  $0 \prec W = W' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e uma matriz  $0 \prec S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $S \in \mathbb{D}$ , que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} -W & -WK' & W(A+BK)' \\ \star & -2S & SB' \\ \star & \star & -W \end{bmatrix} \prec 0, \quad (6)$$

então a origem é globalmente assintoticamente estável para o sistema saturado (4) no tempo discreto.

Observe que, como os lemas são baseados nas condições de setor e na estabilidade global, qualquer não linearidade pertencente ao setor é permitida e, portanto, os valores que definem a saturação podem ser arbitrários.

#### 2.4 Saturação nos Atuadores: Descrição por Rampas

A modelagem por não linearidade de setor, abordada na subseção anterior, não caracteriza especificamente o sistema saturado, mas sim toda uma classe de sistemas (Paim, 2003). Deste modo, obter uma descrição exata da função de saturação é uma alternativa na busca por melhorias (resultados menos conservadores) nas condições de análise para sistemas sujeitos a saturação. Em Primlos and Giannelli (2001) a saturação é representada como um problema de otimização restrito, em que as condições necessárias (Karush-Kuhn-Tucker) para otimização são usadas para derivar restrições lineares e quadráticas que caracterizam a saturação. A construção dessa representação é mostrada na sequência, baseando-se no desenvolvimento de Valmorbidia (2021).

A função rampa  $r(u)$ , ilustrada na Figura 1, pode ser definida como

$$r(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u, & u > 0. \end{cases} \quad (7)$$

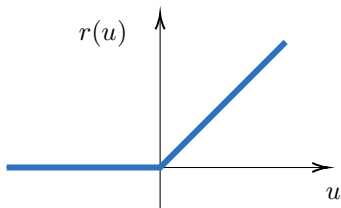


Figura 1. Função rampa  $r(u)$ .

Alternativamente,  $r(u)$  pode ser definida a partir das restrições envolvendo as variáveis  $u$  e  $r(u)$ , sendo duas desigualdades e uma igualdade, dadas por

$$r(u) \geq 0, \quad r(u) - u \geq 0, \quad r(u)(r(u) - u) = 0 \quad (8)$$

como pode ser verificado por inspeção escolhendo-se valores arbitrários de  $u$ .

As condições dadas em (8) podem ser obtidas alternativamente a partir do problema de otimização parametrizado em  $\theta$

$$\min_{r \geq 0} \frac{1}{2}(r - \theta)^2,$$

impondo-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (necessárias para a otimalidade) (Boyd and Vandenberghe, 2004)

$$r - \theta - \lambda = 0, \quad \lambda r = 0, \quad r \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

ou, eliminando-se a variável  $\lambda = r - \theta$ ,

$$r(r - \theta) = 0, \quad r \geq 0, \quad r - \theta \geq 0$$

que recaem nas condições dadas em (8) com  $\theta = u$  e  $r = r(u)$ .

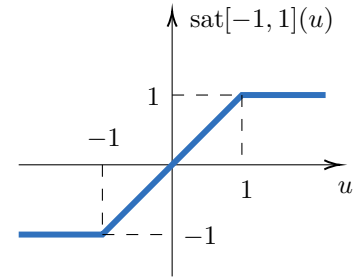


Figura 2. Função saturação  $\text{sat}[-1, 1](u)$ .

A função rampa pode ser utilizada para descrever outras funções, como por exemplo a função saturação, dada por

$$\text{sat}[-1, 1](u) = \begin{cases} -1, & u \leq -1, \\ u, & -1 < u < 1, \\ 1, & u \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

e ilustrada na Figura 2. A saturação pode ser reescrita em termos da função zona-morta (ilustrada na Figura 3), dada por

$$\text{dz}[-1, 1](u) = \begin{cases} u + 1, & u \leq -1, \\ 0, & -1 < u < 1, \\ u - 1, & u \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

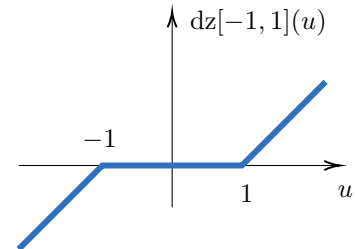


Figura 3. Função zona morta  $\text{dz}[-1, 1](u)$ .

Pode-se notar que

$$\text{dz}[-1, 1](u) = r(u - 1) - r(-u - 1) \quad (11)$$

e, portanto, como  $\text{sat}[-1, 1](u) = u - \text{dz}[-1, 1](u)$ , tem-se

$$\text{sat}[-1, 1](u) = u - r(u - 1) + r(-u - 1). \quad (12)$$

Para um sinal saturado entre  $u_{\min} < 0$  e  $u_{\max} > 0$ , tem-se  $\text{sat}[u_{\min}, u_{\max}](u) = u - r(u - u_{\max}) + r(-u + u_{\min})$ . (13)

### 2.5 Definição do Problema

Considere o sistema linear positivo

$$\delta[x] = Ax + B\text{sat}[u_{\min}, u_{\max}](u), \quad (14)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados e  $u \in \mathbb{R}$  o sinal de controle<sup>2</sup> sujeito a saturação. Considerando a lei de controle por realimentação de estados  $u = Kx$ , obtém-se o sistema em malha fechada

$$\delta[x] = Ax + B\text{sat}[u_{\min}, u_{\max}](Kx) \quad (15)$$

que pode ser reescrito em termos da função rampa

$$\delta[x] = Ax + B(Kx - r(Kx - u_{\max}) + r(-Kx + u_{\min})) \quad (16)$$

desde que as restrições (8) sejam satisfeitas.

Definindo

$$u_1 = Kx - u_{\max}, \quad u_2 = -Kx + u_{\min} \quad (17)$$

tem-se

$$\delta[x] = Ax + B(Kx - r(u_1) + r(u_2)) \quad (18)$$

bem como, as desigualdades lineares

$$r(u_1) \geq 0, \quad r(u_1) - u_1 \geq 0, \quad r(u_2) \geq 0, \quad r(u_2) - u_2 \geq 0 \quad (19)$$

e as igualdades quadráticas

$$r(u_1)(r(u_1) - u_1) = 0, \quad r(u_2)(r(u_2) - u_2) = 0. \quad (20)$$

Empregando a teoria de Lyapunov é possível verificar a estabilidade global do sistema em malha fechada (18). Para tal,  $r(u_1)$  e  $r(u_2)$  devem satisfazer as restrições que descrevem a função rampa, ou seja, as desigualdades (19) e as igualdades (20).

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

O teorema a seguir apresenta condições LMIs para examinar a estabilidade global do sistema em malha fechada (15) para o caso de tempo contínuo.

**Teorema 1.** Se existirem matrizes  $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $T \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$ ,  $T \in \mathbb{D}$ , uma matriz copositiva  $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u + n_x + 1) \times (4n_u + n_x + 1)}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tais que

$$Q_v + Q_h + Q_g \preceq 0, \quad (21)$$

seja satisfeita, sendo

$$Q_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A'P + PA + \text{He}(PBK) + \varepsilon I & -PB & PB \\ 0 & -B'P & 0 & 0 \\ 0 & B'P & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$Q_h = F'TG + G'TF, \quad (23)$$

$$Q_g = [V \ E \ F' \ G'] M \begin{bmatrix} V' \\ E' \\ F \\ G \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n_u + n_x + 1) \times 1}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n_u + n_x + 1) \times n_x}, \quad G = \begin{bmatrix} u_{\max} & -K & I & 0 \\ -u_{\min} & K & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (26)$$

<sup>2</sup> A apresentação é feita para uma única entrada por simplicidade, sendo imediata a extensão para trabalhar com um número arbitrário de sinais de entrada em que  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

com  $F$  e  $G \in \mathbb{R}^{2n_u \times (2n_u + n_x + 1)}$  então a origem do sistema positivo em malha fechada de tempo contínuo (15) é globalmente exponencialmente estável.

**Prova.** Seja  $v(x) = x'Px$  uma candidata a função Lyapunov, para  $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , implicando que

$$x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (27)$$

Uma vez que (21) é válida, a seguinte forma quadrática é satisfeita

$$\xi'(Q_v + Q_h + Q_g)\xi \leq 0 \quad (28)$$

sendo  $\xi' = [1 \ x' \ r(u_1)' \ r(u_2)']$ . Observe que

$$\xi'Q_v\xi = \dot{v}(x) + \varepsilon x'x, \quad \varepsilon > 0.$$

Além disso, para  $r(u_1)$  e  $r(u_2)$  satisfazendo (19) e (20), tem-se  $\xi'Q_h\xi = 0$  e  $\xi'Q_g\xi \geq 0$ , implicando em

$$\dot{v}(x) \leq -\xi'Q_g\xi - \varepsilon x'x, \quad (29)$$

o que conclui a prova.

O Teorema 1 pode ser estendido para abranger sistemas lineares sujeitos a saturação, não necessariamente positivos, como segue.

**Corolário 1.** Se existirem matrizes  $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $T \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$ ,  $T \in \mathbb{D}$ , uma matriz copositiva  $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u + 1) \times (4n_u + 1)}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tais que (21) seja satisfeita, com  $Q_v$  definida por (22),  $Q_h$  descrita por (23) e

$$Q_g = [V \ F' \ G'] M \begin{bmatrix} V' \\ F \\ G \end{bmatrix} \quad (30)$$

com  $V$ ,  $F$  e  $G$  definidas em (25) e (26), então a origem do sistema em malha fechada de tempo contínuo (15) é globalmente exponencialmente estável.

Perceba que no Corolário 1 a dimensão da matriz copositiva  $M$  é menor do que no Teorema 1, pois no teorema os estados são incorporados aos vetores que multiplicam  $M$ .

As condições LMIs para examinar a estabilidade global do sistema em malha fechada (15) em tempo discreto são apresentadas no teorema a seguir.

**Teorema 2.** Se existirem matrizes  $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $T \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$ ,  $T \in \mathbb{D}$ , uma matriz copositiva  $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u + n_x + 1) \times (4n_u + n_x + 1)}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tais que (21) seja válida com  $Q_h$  e  $Q_g$  definidas, respectivamente, por (23) e por (24) e com

$$Q_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & A'PA - P + \text{He}(A'PBK) + K'B'PBK + \varepsilon I \\ \star & \star \\ \star & \star \\ 0 & 0 \\ -A'PB - K'B'PB & A'PB + K'B'PB \\ B'PB & -B'PB \\ \star & B'PB \end{bmatrix}, \quad (31)$$

então a origem do sistema positivo em malha fechada a tempo discreto (15) é globalmente exponencialmente estável.

**Prova.** A prova é similar à prova do Teorema 1.

Análogo ao caso contínuo, o Teorema 2 também pode ser adaptado para sistemas lineares sujeitos a saturação, não necessariamente positivos, conforme descrito no próximo corolário.

Corolário 2. Se existirem matrizes  $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$ ,  $\mathbb{T} \in \mathbb{D}$ , uma matriz copositiva  $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u+1) \times (4n_u+1)}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tais que (21) seja válida para  $Q_h$  e  $Q_g$  dadas, respectivamente, por (23) e por (30) e com  $Q_v$  definida por (31), então a origem do sistema em malha fechada de tempo discreto (15) é globalmente exponencialmente estável.

#### 4. EXEMPLOS

As rotinas testadas nos exemplos foram programadas em Matlab-R2017a, com o *parser* Yalmip (Löfberg, 2004) e o SDP *solver* Mosek (Andersen and Andersen, 2000).

*Exemplo 1.* Neste experimento numérico é feita uma comparação entre os métodos do Lema 8 (S1) e os propostos no Teorema 1 (T1) e no Corolário 1 (C1), empregando as relaxações de copositividade definidas pelos lemas 5 (L5) e 7 (L7) na matriz  $M$ , presente em (24) e (30). Para tal, é montada uma base de dados<sup>3</sup> composta por sistemas positivos a tempo contínuo. Para cada sistema que compõe a base, cria-se uma matriz  $A$  Metzler estável, as demais matrizes do sistema são geradas de modo a serem não negativas, calcula-se um ganho  $K$  (no caso, que minimiza um limitante da norma  $H_2$  — segundo Ebihara et al. (2019) — e mantém a positividade do sistema em malha fechada) e, caso a estabilidade do sistema em malha aberta (estável) e em malha fechada (com ganho conhecido) possa ser certificada por uma mesma matriz de Lyapunov (situação em que a abordagem do Lema 8 é necessária e suficiente para o caso SISO), o sistema gerado é adicionado à base. A base possui 200 sistemas para cada uma das combinações  $(n_x, n_u)$  em que  $n_x = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $n_u = \{2, 3, 4, 5\}$  com  $n_u \leq n_x$ .

Em relação aos parâmetros adotados, os valores  $u_{max_i} = 1$ ,  $u_{min_i} = -1$ ,  $i = 1, \dots, n_u$  foram escolhidos por simplicidade (poderiam ser arbitrários). A tolerância adotada na resolução das condições (LMIs, desigualdades escalares e igualdades) é  $tol = 10^{-7}$ . Note que o parâmetro  $tol$  é necessário pois a condição (21) inclui também a igualdade como solução, e que o decrescimento estrito da condição de Lyapunov ao longo das trajetórias e a restrição  $P \succ 0$  são garantidos pela escolha de  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

A Tabela 1 apresenta as soluções obtidas para o caso contínuo no tempo. Note que as soluções obtidas com T1 e C1 são menos conservadoras quando comparadas com as de S1. Ademais, note que os resultados utilizando o Teorema 1, específico para o caso de sistemas positivos, permitem verificar a estabilidade global de uma quantidade maior de sistemas do que o Corolário 1. Entretanto, percebe também que há um aumento significativo no tempo de simulação, denotado por  $t$  (segundos), visto que a ordem da matriz copositiva a ser testada,  $M$ , é maior no Teorema 1, o que, em especial para o Lema 7, influencia diretamente na quantidade de restrições do problema.

*Exemplo 2.* Neste segundo experimento numérico aborda-se o caso discreto<sup>4</sup> no tempo, com uma base de sistemas

gerada com o mesmo critério do caso contínuo (uma matriz de Lyapunov  $P = P' \succ 0$  comum entre o sistema em malha aberta — estável — e o sistema em malha fechada, lembrando que para o caso discreto a matriz  $A$  em vez de Metzler é não negativa). Portanto, a comparação é realizada entre o Lema 9 (S2), o Teorema 2 (T2) e o Corolário 2 (C2), e novamente adotam-se as relaxações de copositividade dos lemas 5 e 7.

A quantidade de sistemas positivos discretos no tempo com estabilidade global verificada e o tempo de simulação,  $t$  (segundos), necessário para isto são expostos na Tabela 2. Os parâmetros utilizados para a simulação são os mesmos do caso contínuo, isto é,  $u_{max_i} = 1$ ,  $u_{min_i} = -1$ ,  $i = 1, \dots, n_u$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $tol = 10^{-7}$ .

Na Tabela 2, T2 e C2 apresentam resultados menos conservadores em relação a S2. As soluções associadas ao Teorema 2, específico para o caso de sistemas positivos, são mais vantajosas que as do Corolário 2 apenas quando associadas à relaxação mais simples dada no Lema 5. Novamente, o tempo de simulação referente ao Teorema 2 é maior, pois, assim como no caso contínuo, a dimensão da matriz copositiva,  $M$ , é maior quando comparada à do Corolário 2.

#### 5. CONCLUSÃO

Os métodos propostos para estabilidade global de sistemas lineares positivos sujeitos a saturação nos atuadores, no tempo contínuo e discreto, mostraram-se menos conservadores quando comparados com as condições dos lemas 8 e 9, disponíveis na literatura. O emprego dos teoremas 1 e 2 (desenvolvidos especificamente para investigar o caso de sistemas positivos) em oposição aos corolários 1 e 2 produz melhores resultados na análise de estabilidade de sistemas positivos ao utilizar a relaxação descrita no Lema 5, ao preço do aumento da complexidade computacional.

Como trabalhos futuros, pretende-se estender as condições de análise de estabilidade global para tratar o problema de controle de sistemas dinâmicos com saturação e também investigar condições de estabilidade local.

<sup>3</sup> Disponível em [https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated\\_c.zip](https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated_c.zip)

<sup>4</sup> Disponível em [https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated\\_d.zip](https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated_d.zip)

Tabela 1. Resultados da estabilidade global de sistemas positivos contínuos no tempo com ordem  $n_x$  e entradas  $n_u$  comparando o método do Lema 8 ( $S1$ ), com os do Teorema 1 ( $T1$ ) e Corolário 1 ( $C1$ ). As abordagens propostas utilizam os testes de copositividade dos lemas 5 ( $L5$ ) e 7 ( $L7$ ).

$n_x$	$n_u$	$S1$	$t(s)$	$C1_{L5}$	$t(s)$	$C1_{L7}$	$t(s)$	$T1_{L5}$	$t(s)$	$T1_{L7}$	$t(s)$
2	2	22	24.7	35	27.2	98	186.2	49	37.7	102	290.4
3	2	20	48.1	49	52.6	110	366.6	99	74.6	115	550.4
	3	2	71.6	6	80.9	50	1001.1	25	122.5	55	1601.9
4	2	59	94.8	99	108.3	148	1164.1	144	161.6	149	1817.5
	3	2	118	7	138.3	72	1818.8	54	212.8	73	2928.1
	4	0	142.1	3	173.2	35	3337.5	14	282.4	41	5969.7
5	2	75	165.4	104	204.8	154	3569.4	152	325.8	154	6243.3
	3	7	188.9	37	237.3	116	4268	109	381.9	118	7173.8
	4	0	212.5	1	272.8	37	6078.8	14	455.5	43	11028.7
	5	0	235.8	1	313.2	16	10088.2	10	554.9	20	19321.5
TOTAL		9.3%	0h36	17.1%	0h44	36.9%	9h25	33.5%	1h12	43.5%	16h21

Tabela 2. Resultados da estabilidade global de sistemas positivos discretos no tempo com ordem  $n_x$  e entradas  $n_u$  comparando o método do Lema 9 ( $S2$ ), com os do Teorema 2 ( $T2$ ) e Corolário 2 ( $C2$ ). As abordagens propostas utilizam os testes de copositividade dos lemas 5 ( $L5$ ) e 7 ( $L7$ ).

$n_x$	$n_u$	$S2$	$t(s)$	$C2_{L5}$	$t(s)$	$C2_{L7}$	$t(s)$	$T2_{L5}$	$t(s)$	$T2_{L7}$	$t(s)$
2	2	32	24.2	61	28.9	109	162.1	97	37.3	110	210.1
3	2	43	46.1	72	55.1	133	318.6	114	75.4	131	436.6
	3	12	67.9	35	83.3	76	847.4	54	124.5	75	1336.8
4	2	64	89.7	93	111.3	146	1011.1	128	165.3	144	1601.5
	3	3	111.5	41	140.8	100	1560.5	73	217.6	99	2598.9
	4	3	134.4	9	174.2	54	3110.1	24	288.3	51	5609.4
5	2	88	156.6	117	206.1	165	3317.1	148	337.8	161	5905.8
	3	13	178.8	57	239.8	129	3902.5	99	395.2	120	6979.8
	4	1	200.9	14	275.9	75	5538.5	28	468.9	57	10760.9
	5	0	223.1	2	315.9	29	9339.5	12	563.9	27	19551.5
TOTAL		12.9%	0h34	25%	0h45	50.8%	8h08	38.8%	1h14	48.7%	15h27

## REFERÊNCIAS

- Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, 197–232. Springer US. <http://www.mosek.com>.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., and Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*. MIT press, London, England, 3rd edition.
- Ebihara, Y., Colaneri, P., and Geromel, J.C. (2019).  $\mathcal{H}_2$  state-feedback control for continuous-time systems under positivity constraint. In *Proceedings of the 2019 European Control Conference*, 3797–3802. Naples, Italy.
- Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Groff, L.B., Valmorbidia, G., and Jr., J.M.G. (2023). An implicit representation for the analysis of piecewise affine discrete-time systems. *Automatica*, 147, 110730.
- Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Birkhäuser, Boston, MA.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 284–289. Taipei, Taiwan. <http://yalmip.github.io>.
- Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models & Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.
- Paim, C. (2003). *Análise e Controle de Sistemas Lineares sujeitos a Saturação*. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Parrilo, P.A. (2000). *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA.
- Primlos, J.A. and Giannelli, M. (2001). Kuhn-Tucker-based stability conditions for systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10), 1643–1647.
- Rantzer, A. (2015). Scalable control of positive systems. *European Journal of Control*, 24, 72–80.
- Rantzer, A. and Valcher, M.E. (2018). A tutorial on positive systems and large scale control. In *Proceedings of the 57th IEEE Conference on Decision and Control*, 3686–3697. Miami Beach, FL, USA.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer, London, UK.
- Väliäho, H. (1986). Criteria for copositive matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 81, 19–34.
- Valmorbidia, G. (2021). Semi-definite programming methods for the stability analysis of nonlinear systems. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France.
- Yin, Y., Lin, Z., Liu, Y., and Teo, K.L. (2018). Event-triggered constrained control of positive systems with input saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(11), 3532–3542.