

# Minimização de Perturbações em Bombas Elétricas Submersas Utilizando Controladores Robustos e Ferramentas de Aprendizado de Máquina<sup>\*</sup>

A. Banderchuk<sup>\*</sup> D. Coutinho<sup>\*\*</sup> E. Camponogara<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC (e-mail: ana.banderchuk@gmail.com)

<sup>\*\*</sup> Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC (e-mail: daniel.coutinho(eduardo.camponogara)@ufsc.br)

---

**Abstract:** This paper proposes a control strategy consisting of a robust controller and an Echo State Network (ESN) based control law for stabilizing a class of uncertain nonlinear discrete-time systems subject to persistent disturbances. Firstly, the robust controller is designed to ensure that the closed-loop system is Input-to-State Stable (ISS) with a guaranteed stability region regardless of the ESN control action and exogenous disturbances. Then, the ESN based controller is trained in order to mitigate the effects of disturbances on the system output. The proposed approach is applied to an Electric Submersible Pump (ESP) to mitigate the effects of exogenous disturbances.

**Resumo:** Este artigo apresenta uma estratégia que combina um controlador robusto e uma lei de controle gerada por uma Rede Neural de Estado de Eco para estabilizar uma classe de sistemas incertos não-lineares de tempo discreto sujeitos a perturbações persistentes. Primeiro, projeta-se o controlador robusto de modo a garantir a estabilidade entrada-estado do sistema em malha fechada. Para isso, considera-se uma região de estabilidade garantida, que é independente da ação de controle gerada pela rede neural e das perturbações externas. Em seguida, o controlador baseado na rede neural é treinado para minimizar os efeitos das perturbações na saída do sistema. A técnica proposta é aplicada a uma bomba elétrica submersa para minimizar os efeitos de perturbações.

*Keywords:* robust control; machine learning; non-linear systems; echo state network; uncertain systems.

*Palavras-chaves:* controle robusto; aprendizado de máquina; sistemas não-lineares; rede de estado de eco; sistemas incertos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Ferramentas de Inteligência Artificial têm sido amplamente empregadas para o aprendizado e controle de fenômenos complexos, especialmente aqueles difíceis de serem modelados de forma precisa, como sistemas não-lineares e desconhecidos. Por exemplo, Li et al. (2018) utilizam um tipo de rede neural recorrente (RNN - *recurrent neural network*) para o controle de manipuladores redundantes em ambientes ruidosos, e Pan and Wang (2012) empregam duas RNNs para diferentes tarefas em uma abordagem de controle de modelo preditivo para sistemas dinâmicos não-lineares desconhecidos. Em especial, as redes neurais têm sido empregadas como substitutas de controladores convencionais, assim como no trabalho apresentado por Waegeman et al. (2012). Nessa estratégia, uma RNN de tempo discreto é treinada por meio da abordagem de modelo inverso, com o objetivo de aprender um controlador que possa ser aplicado a uma ampla variedade de plantas lineares e não-lineares. No entanto, as RNNs geralmente são difíceis de serem treinadas devido a problemas relacionados à técnica de retro-propagação

em intervalos de tempo longos, como observado por Bengio et al. (1994).

Dentre os diversos tipos de RNNs disponíveis em literatura especializada, as Redes Neurais de Estado de Eco (ESNs - *Echo State Networks*) têm se mostrado mais adequadas para implementações em tempo real (Mahmoud and Elshenawy, 2015). Isso se deve ao fato de que elas empregam algoritmos rápidos de regressão linear para o treinamento (Jaeger, 2001). Devido à rapidez desse processo de aprendizado, as ESNs têm atraído a atenção de pesquisadores da área de controle, como evidenciado pelo resultado apresentado no trabalho de Waegeman et al. (2012), que explora o uso de ESNs para controle de diferentes classes de plantas, lineares e não-lineares.

Uma das principais limitações do uso de RNNs para modelagem e controle de sistemas dinâmicos é a falta de ferramentas formais de verificação que possam oferecer garantias de estabilidade e desempenho (Barabanov and Prokhorov, 2002). No entanto, recentemente, diversos estudos têm considerado ferramentas de controle robusto para lidar com questões de estabilidade em sistemas de malha fechada com a adição de estruturas de aprendizado com realimentação. Por exemplo, Maiworm et al. (2021) empregaram um modelo de controle preditivo em combinação com um sistema de aprendizado online

---

<sup>\*</sup> Este trabalho foi parcialmente apoiado pela CAPES por meio das bolsas 88887.153840/2017-00 (SIU) e 88887.522001/2020-00 (SticAmSud), pelo CNPq através das bolsas 163116/2021-0, 303289/2022-8/PQ e 308624/2021-1/PQ, e por Petrobras através do projeto SIGITEC N° 2018/00217-3.

de um modelo não-linear de Processo Gaussiano, assegurando garantia de estabilidade entrada-estado e Bethge et al. (2018) proporam uma estrutura onde viabilidade robusta e satisfação de restrições são garantidas por modelos nominais, enquanto o desempenho é otimizado usando modelos aprendidos.

Recentemente, diversos estudos têm explorado o uso de ferramentas de controle robusto baseadas em programação semi-definida (SDP - *semidefinite programming*). Essa abordagem tem sido utilizada para prover garantias de estabilidade e desempenho para sistemas de malha fechada com capacidade de aprendizado. Alguns exemplos de trabalhos que adotam essa abordagem incluem os trabalhos de Zenati et al. (2022) e Revay et al. (2021). No entanto, quando considera-se ESNs para a modelagem e controle de sistemas complexos, ferramentas de SDP podem levar a um esforço computacional elevado, uma vez que os modelos dinâmicos da ESN normalmente possuem um grande número de estados.

Neste artigo, propõe-se uma solução alternativa para garantir a estabilidade de sistemas de malha fechada com leis de controle de aprendizado incorporadas, sem a necessidade de realizar cálculos computacionais complexos para lidar com sistemas de realimentação em grande escala. Especificamente, considera-se uma abordagem de duas malhas (compostas por um controlador robusto e um controlador baseado em ESN na malha externa) para mitigar os efeitos de perturbações persistentes em uma classe de sistemas não-lineares incertos (que podem ser instáveis em malha aberta). Inicialmente, projeta-se um controlador robusto para garantir que o sistema em malha fechada seja entrada-estado estável (ISS - *input-to-state stable*), independentemente da lei de controle gerada pela ESN e de perturbações exógenas. Esse controlador é projetado para minimizar os efeitos das perturbações utilizando ferramentas de programação semi-definida (SDP). Em seguida, a lei de controle baseada em ESN é treinada de forma *offline* para aprimorar o desempenho em malha fechada, levando em consideração a propriedade ISS.

## 2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere a seguinte classe de sistemas não-lineares de tempo discreto:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x_+ = f(x, \theta, u, d) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$  é um vetor de parâmetros variantes no tempo,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $d \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n_d}$  é a entrada de perturbação,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída controlada,  $f(\cdot)$  é uma função vetorial com dependência polinomial em relação a  $x$  e linear em respeito a  $(\theta, u, d)$ ,  $x_+ = x(k+1)$ , e  $\mathcal{X}$ ,  $\Theta$  e  $\mathcal{D}$  são conjuntos compactos.

Em relação ao sistema (1), assume-se que:

- A1)  $f(0, \theta, 0, 0) = 0$  para todo  $\theta \in \Theta$ .
- A2)  $\mathcal{X}$  é um conjunto convexo, com  $0 \in \mathcal{X}$ , que pode ser representado em termos do envoltório convexo de seus  $n_v$  vértices, *i.e.*,  $\mathcal{X} := \text{Co}\{v_1, \dots, v_{n_v}\}$ , ou, alternativamente, como a interseção de  $n_h$  semi-planos  $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : h_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, n_h\}$  com  $v_i \in \mathbb{R}^{n_x}, i = 1, \dots, n_v$ , e  $h_j \in \mathbb{R}^{n_x}, j = 1, \dots, n_h$ , definindo respectivamente os vértices e faces de  $\mathcal{X}$ .
- A3)  $\Theta$  é um conjunto politópico com vértices conhecidos.
- A4)  $\mathcal{D}$  é um domínio limitado em magnitude dado por  $\mathcal{D} := \{d \in \mathbb{R}^{n_d} : d^T d \leq \eta_d^2/2\}$  com  $\eta_d > 0$  definindo o tamanho de  $\mathcal{D}$ .

Neste artigo, o interesse está na regulação da saída controlada  $y$  (em torno de uma referência desejada  $r$ ), com a minimização dos efeitos da perturbação  $d$  (limitada em magnitude). Com esse objetivo, a entrada de controle  $u$  é obtida através da combinação de uma lei de controle robusta  $u_1$  e um termo de correção  $u_2$  gerado pela ESN, conforme ilustrado na Figura 1.

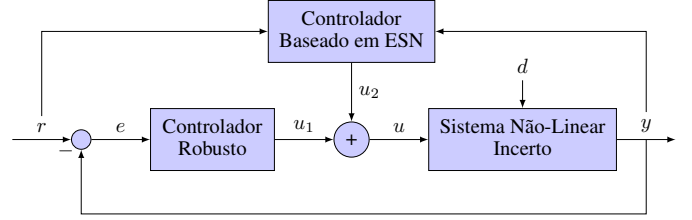


Figura 1. Configuração do Controlador Proposto.

O sinal  $u_1$  do controlador robusto é projetado para assegurar que o sistema de malha fechada seja entrada-estado estável, independentemente da perturbação persistente  $d$  e do sinal de controle  $u_2$  (supondo que ambos possuem magnitude limitada com limites conhecidos). O sinal de correção  $u_2 \in \mathcal{U}$  é calculado pela ESN de forma a minimizar os efeitos de  $d$  em  $y$ . É importante notar que essa configuração de controle assegura a propriedade de estabilidade ISS para o sistema em malha fechada.

Por simplicidade, esse artigo tem como foco o problema da regulação de  $y$  ao redor de  $r \equiv 0$ , e, assume-se que:

- A5)  $u_2$  é restrito ao conjunto  $\mathcal{U} := \{u_2 \in \mathbb{R}^{n_u} : u_2^T u_2 \leq \eta_u^2/2\}$ , com  $\eta_u > 0$  definindo o tamanho de  $\mathcal{U}$ .

Além disso, considera-se que o sinal de controle robusto é uma lei de controle de realimentação de estados polinomial conforme

$$u_1 = K(x)x, \quad (2)$$

com  $K : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  sendo uma função polinomial matricial a ser determinada.

Considerando o cenário acima, os problemas a serem abordados neste artigo são:

- **Problema de Controle Robusto:** projetar  $K(x)$  de forma que o sistema em malha fechada representado em (1) com  $u = u_1 + u_2$  seja ISS para todo  $x(0) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ ,  $u_2 \in \mathcal{U}$  e  $d \in \mathcal{D}$  enquanto minimiza  $\|x\|$ , com  $\mathcal{R}$  representando uma estimativa superior do conjunto de atração.
- **Problema de Controle Baseado em ESN:** para uma dada lei de controle robusta  $u_1$ , treinar a ESN de forma que a saída  $\|y\|$  seja minimizada.

## 3. RESULTADOS INSTRUMENTAIS

Nesta seção, será realizada uma revisão de alguns resultados fundamentais relacionados à estabilidade entrada-estado e às Redes Neurais de Estado Eco. Esses resultados são essenciais para a compreensão do principal resultado deste trabalho.

### 3.1 Estabilidade Entrada-Estado

Considere o seguinte sistema em tempo discreto

$$x_+ = f(x, w), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathcal{X}, \quad w \in \mathcal{W}, \quad (3)$$

onde  $x \in \mathcal{X}$ ,  $w \in \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{X}$  é um conjunto compacto contendo a origem e  $\mathcal{W} := \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : w^T w \leq 1\}$ .

*Definição 1.* (Estabilidade Entrada-Estado (Jiang and Wang, 2001; de Souza et al., 2015)) A origem do sistema (3) é dita ser ISS se existe uma função  $\mathcal{K} \alpha : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ , uma função  $\mathcal{K} \mathcal{L} \beta : \mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  e um escalar positivo  $\varrho$  de forma que se assegura que  $\|x(k, x_0, w)\| \leq \alpha(\|w\|) + \beta(\|x_0\|, k)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$ ,  $\|x_0\| \leq \varrho$  e  $\|w\|_{\infty} \leq \varrho$ .

O lema a seguir apresenta uma caracterização de Lyapunov para a estabilidade entrada-estado, de acordo com a Definição 1, adaptada do Lema 1 (de Souza et al., 2015) para o nosso contexto.

*Lema 1.* (Caracterização de Lyapunov para ISS) A origem do sistema (3) é ISS se existe uma função  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$  e um escalar  $\mu \in (0, 1)$  de forma que

$$\Delta V \leq \mu(w^T w - V), \quad \Delta V := V_+ - V, \quad (4)$$

para todo  $x \in \mathcal{X}$  e  $w \in \mathcal{W}$ . Além disso, para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$  e  $w \in \mathcal{W}$ , a trajetória de estado  $x(k) \in \mathcal{R}$  para todo  $k \geq 0$ , onde

$$\mathcal{R} := \{x \in \mathcal{X} : V \leq 1\} \quad (5)$$

satisfazendo  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ .

### 3.2 Redes Neurais de Estado de Eco

Redes Neurais de Estado de Eco (ESNs - *Echo State Networks*) são um tipo de redes neurais recorrentes de rápida aprendizagem que são formadas por uma camada de entrada, uma camada interna com um grande número de neurônios esparsamente conectados (chamada de reservatório), e uma camada de saída (Jaeger, 2002). Os pesos de conexão das camadas de entrada e do reservatório são fixos após a inicialização, e os pesos de saída podem ser treinados de forma simples utilizando métodos de resolução de problemas por regressão linear (Sun et al., 2022). Sob certas considerações, a estabilidade interna e a propriedade de estado eco (ou seja, a influência de como as condições iniciais desaparecem com o tempo) são garantidas. Em outras palavras, a propriedade de estado eco refere-se a habilidade de que a ESN possui em manter um estado interno estável, independente das entradas que recebe, permitindo que a rede continue processando novas entradas sem que seja afetada pelas entradas anteriores.

A dinâmica de uma ESN pode ser descrita na seguinte representação no espaço de estados de tempo discreto:

$$\begin{cases} \xi_+ = (1 - \gamma)\xi + \gamma f_{\xi}(W_R^R \xi + W_v^R v + W_{\text{bias}}^R) \\ \sigma = W_R^{\sigma} \xi \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\xi \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da ESN que corresponde aos neurônios do reservatório,  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$  é a entrada da ESN,  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_{\sigma}}$  é a saída da ESN,  $f_{\xi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de ativação – tipicamente a aplicação da função  $\tanh(\cdot)$  elemento a elemento,  $\gamma \in (0, 1)$  é a taxa de escoamento (uma constante de um filtro passa-baixas), e  $W_R^R$ ,  $W_v^R$  e  $W_R^{\sigma}$  são as matrizes de pesos reservatório-reservatório, entrada-reservatório e reservatório-saída, respectivamente, enquanto  $W_{\text{bias}}^R$  representa o termo de bias do reservatório.

Os pesos das conexões que vão para o reservatório são inicializadas de forma aleatória e permanecem fixas, em geral seguindo os seguintes passos:

- 1) As matrizes  $\overline{W}_R^R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_v^R \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$  e  $W_{\text{bias}}^R \in \mathbb{R}^n$  são geradas de forma aleatória seguindo uma distribuição normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- 2) A matriz  $W_R^R$  é obtida ao reescalar  $\overline{W}_R^R$  de tal forma que seu raio espectral seja menor que 1 (de forma a garantir a estabilidade interna). Isso é:

$$W_R^R = \frac{\rho_R}{\lambda_{\max}} \overline{W}_R^R, \quad (7)$$

onde  $\rho_R \in (0, 1)$  é o raio espectral desejado e  $\lambda_{\max}$  é o maior valor singular de  $\overline{W}_R^R$ .

- 3)  $W_v^R$  e  $W_{\text{bias}}^R$  são multiplicadas pelos escalares  $\rho_v$  e  $\rho_{\text{bias}}$ , respectivamente.

Os parâmetros  $\rho_R$ ,  $\rho_v$  e  $\rho_{\text{bias}}$  são essenciais para a performance de aprendizagem da rede neural e influenciam diretamente a capacidade de memória e representação não-linear do reservatório. Além disso, valores de taxa de escoamento  $\gamma$  menores tendem a aumentar a capacidade de memória do reservatório, enquanto valores mais altos favorecem entradas e saídas que variam rapidamente no tempo.

Considerando uma sequência grande o suficiente de entradas e saídas coletadas do sistema, a matriz de pesos  $W_R^{\sigma}$  do reservatório para a saída é treinada por meio da solução de um problema de mínimos quadrados. Para treinar a ESN, os dados de entrada  $v[k]$  são organizados em uma matriz  $\Upsilon$  e a saída desejada  $\sigma[k]$  em um vetor  $\Sigma$ , considerando um intervalo de tempo de simulação. Cada linha  $v^T$  da matriz  $\Upsilon$  corresponde a uma amostra  $k$  e as colunas estão relacionadas com cada entrada da ESN. Para simplificar, consideramos que há várias entradas e apenas uma saída. As linhas de  $\Upsilon$  representam as entradas do reservatório para cada instante de tempo, gerando uma matriz de estados  $\Xi$  onde as linhas correspondem à sequência de estados resultantes.

Considerando a Regressão de Ridge, o vetor do peso reservatório-saída  $W_R^{\sigma}$  é obtido resolvendo o seguinte sistema linear:

$$(\Xi^T \Xi - \lambda I) W_R^{\sigma} = \Xi^T \Sigma \quad (8)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de regularização de Tikhonov que é utilizado para penalizar a magnitude do peso de forma a evitar o sobre-ajuste. No caso de saídas múltiplas, o vetor de pesos  $W_R^{\sigma_i}$  para cada saída  $\sigma_i$  é calculado utilizando a mesma equação de (8), porém utilizando o vetor  $\Sigma_i$  com as saídas desejadas.

## 4. PROJETO DE CONTROLE

Os principais resultados deste artigo serão apresentados nessa seção. Primeiro, desenvolve-se uma abordagem de programação semi-definida para o projeto de um controlador robusto por realimentação de estados estabilizante. Em seguida, o controlador baseado em ESN é projetado considerando a estratégia de controle por dinâmica inversa.

### 4.1 Projeto de Controle Robusto

O sistema  $\mathcal{G}$  em (1) pode ser reescrito, sem perda de generalidade, da seguinte forma

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x_+ = A(x, \theta)x + B_u(\theta)(u_1 + u_2) + B_d(\theta)d \\ y = Cx \end{cases} \quad (9)$$

partindo do fato de que  $f(x, \theta, u, d)$  é uma função polinomial em respeito a  $x$  e linear em respeito a  $(\theta, u, d)$ , onde  $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é uma função polinomial matricial de  $x$  e afim em respeito a  $\theta$ , e  $B_u(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  e  $B_d(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_d}$  são funções matriciais afim de  $\theta$ .

A fim de obter uma solução convexa para o problema de controle robusto, considere  $q$  o maior grau dos polinômios de  $A(x, \theta)$  e as seguintes definições:

$$B_w(\theta) = [\eta_u B_u(\theta) \quad \eta_d B_d(\theta)], \quad w = \begin{bmatrix} u_2/\eta_u \\ d/\eta_d \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A(x, \theta) = A_0(\theta) + \Pi(x)^T A_1(\theta), \quad (11)$$

onde  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ ,  $n_w = n_d + n_u$ ,  $A_0(\theta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $A_1(\theta) \in \mathbb{R}^{q n_x \times n_x}$  são funções matriciais afins em  $\theta$ , e

$$\Pi(x) = [m^{(1)}(x) \otimes I_{n_x} \quad \cdots \quad m^{(q)}(x) \otimes I_{n_x}]^T, \quad (12)$$

com  $m^{(l)}(x) \in \mathbb{R}^{n_l}$ ,  $l = 1, \dots, q$ , representando o vetor formado por todos os monômios de grau  $l$ . Observe que, considerando (11) e (12), existem funções matriciais afins em  $x$ , i.e.,  $\Omega_0(x) \in \mathbb{R}^{n_m n_x \times n_x}$  e  $\Omega_1(x) \in \mathbb{R}^{n_m n_x \times n_m n_x}$  de tal forma que o seguinte é válido:

$$\Omega_0(x) + \Omega_1(x)\Pi(x) = 0_{n_m n_x \times n_x} \quad (13)$$

$$\det\{\Omega_1(x)\} = c, \quad c \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (14)$$

com  $c$  sendo uma dada constante real e

$$n_m = n_1 + \cdots + n_q \quad (15)$$

Além disso, o ganho de controle  $K(x)$  de (2) é definido como:

$$K(x) = K_0 + K_1 \Pi(x) \quad (16)$$

onde  $\Pi(x)$  é como apresentado em (12), e  $K_0 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  e  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_m n_x}$  são matrizes a serem determinadas.

Dessa forma, considerando (9), (10) e (11), a dinâmica do sistema em malha fechada é dada por

$$x_+ = \left( A_0(\theta) + \Pi(x)^T A_1(\theta) + B_u(\theta)(K_0 + K_1 \Pi(x)) \right) x + B_w(\theta)w \quad (17)$$

O seguinte resultado apresenta condições suficientes para o projeto dos ganhos  $K_0$  e  $K_1$  de forma que o sistema definido acima é ISS para todo  $w \in \mathcal{W}$  em termos de um conjunto finito de restrições de LMIs.

**Teorema 1.** Considere o sistema definido em (1) satisfazendo (A1)-(A4), com sua dinâmica de malha fechada em (17), com  $\Pi(x)$  satisfazendo (13) e (14). Seja  $\mu \in (0, 1)$  um dado escalar real. Suponha que existam  $Q = Q^T$ ,  $G$ ,  $M_0$ ,  $M_1$  e  $L$  sendo matrizes reais, com dimensões apropriadas, que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} 1 & h_i^T Q \\ Q h_i & Q \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_h \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} (1-\mu)(Q-G-G^T) & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\mu I_{n_w} & \star & \star \\ A_0(\theta)G + B_u(\theta)M_0 & B_u(\theta)M_1 & B_w(\theta) & -Q & \star \\ A_1(\theta)G & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + L\Omega(x) + \Omega(x)^T L^T < 0, \quad \forall (x, \theta) \in \mathcal{V}\{\mathcal{X} \times \Theta\} \quad (19)$$

onde  $\mathcal{V}\{\mathcal{X} \times \Theta\}$  representa o conjunto de todos os vértices de  $\mathcal{X} \times \Theta$  e

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} \Omega_0(x) & \Omega_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_0(x) & \Omega_1(x) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema em malha fechada de (17) com  $K_0 = M_0 G^{-1}$ ,  $K_1 = M_1 G_a^{-1}$ ,  $G_a = \text{diag}\{G, \dots, G\}$ , é localmente ISS estável. Além disso, para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$  e  $w(k) \in \mathcal{W}$ , a trajetória dos estados  $x(k)$  permanece em  $\mathcal{R}$ ,  $\forall k > 0$ , com  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T Q^{-1} x \leq 1\}$ .

A prova detalhada do Teorema 1 não é apresentada aqui. Leitores interessados podem consultar o trabalho de Banderchuk et al. (2023) para a prova completa.

A lei de controle robusta  $u_1 = K(x)x$  pode ser projetada enquanto minimiza-se  $\|x(k)\|$  ao considerar o seguinte problema de otimização

$$\min_{\lambda, Q, \dots, L} \lambda : \begin{cases} \lambda I_{n_x} - Q \geq 0, \\ (18) \text{ e } (19), \end{cases} \quad (20)$$

que minimiza o maior autovalor da matriz  $Q$ .

## 4.2 Aprendizagem e Teste da ESN

Diversos algoritmos de controle clássicos utilizam conhecimento prévio de um sistema para alcançar o comportamento desejado, assim como acontece com o controlador robusto apresentado anteriormente. No entanto, sistemas complexos não-lineares podem não ser totalmente conhecidos ou modelados corretamente, o que justifica o uso de abordagens de aprendizado, como as redes neurais. Neste trabalho, consideramos o aprendizado de um controlador baseado no modelo inverso de uma planta, que utiliza a saída desejada de um sistema para calcular a entrada necessária que leve para essa saída. Em outras palavras, ele “inverte” a relação entre saídas e entradas do sistema.

Propõe-se o uso de uma ESN como modelo inverso, devido às suas características desejáveis (Waegeman et al., 2012; Jordanou et al., 2019). Como uma rede neural recorrente, a ESN possui uma memória interna que permite que ela mantenha um contexto ao longo do tempo, o que a torna mais adequada para lidar com dependências temporais. Além disso, ESNs são de fácil e rápido treinamento.

O objetivo do modelo inverso é de aprender a entrada de controle da planta  $\sigma[k] = u_2[k - \delta]$ , na amostra de tempo  $k - \delta$ , que leva o sistema para a saída atual  $y[k]$ . Para isso, esse trabalho considera que a entrada da ESN, i.e.,  $v[k] = (Y[k], U_1[k], U_2[k])$ , recebe saídas passadas da planta  $y[\cdot]$  e sinais do controlador robusto  $u_1[\cdot]$  e da ESN  $u_2[\cdot]$  espaçados no tempo de acordo com um parâmetro de atraso  $\delta \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{u}_2[k - \delta] &= f(Y[k], U_1[k], U_2[k]) \\ u_2[k] &= \frac{\eta_u}{\sqrt{2}} \tanh(\bar{u}_2[k]) \end{aligned} \quad (21)$$

com

$$\begin{aligned} Y[k] &= (y[k], y[k - \delta], \dots, y[k - m\delta]) \\ U_1[k] &= (u_1[k - \delta], \dots, u_1[k - m\delta]) \\ U_2[k] &= (u_2[k - 2\delta], \dots, u_2[k - (m + 1)\delta]) \end{aligned}$$

onde  $f$  é a ESN e os hiperparâmetros são o número de amostras  $m$  de saídas passadas e o atraso  $\delta$ , que devem ser sintonizados de forma adequada. Tomando como entrada a saída corrente  $y[k]$  e a saídas passadas da planta, os sinais passados do controlador robusto  $U_1[k]$  e da ESN  $U_2[k]$ , a rede é treinada para aprender o sinal de controle  $u_2[k]$  aplicado no tempo  $k$ .

Considerando simulações realizadas com a planta, sendo  $u_1$  o sinal gerado pelo controlador robusto e  $u_2$  um sinal aleatório dentro dos limites de estabilidade, obtemos uma matriz  $\Xi$  com a trajetória dos estados do reservatório, uma matriz  $v$  com as entradas utilizadas na rede neural e um vetor  $\Sigma$ , com a saída desejada. O próximo passo é a aplicação da Regressão de Ridge para treinar o modelo inverso  $f$ , utilizando a Equação (8).

Uma vez que a matriz reservatório-saída  $W_R^\sigma$  é aprendida pelo modelo inverso, a ESN resultante pode ser usada para gerar o sinal de controle  $u_2$  que aperfeiçoa a performance do sistema. Isso pode ser feito ao deslocar no tempo  $\delta$  amostras em todos os sinais de (21), ou seja  $\sigma[k + \delta] = \bar{u}_2[k] = f(Y[k + \delta], U_1[k + \delta], U_2[k + \delta])$ . No instante corrente  $k$ , dada a saída da planta  $y[k]$ , os sinais corrente e passados do controlador robusto  $U_1[k + \delta]$ , e as saídas passadas do controlador ESN  $U_2[k + \delta]$ , a ESN produz o sinal  $\bar{u}_2[k]$  a ser adicionado ao sinal do controlador robusto  $u_1[k]$  para levar a saída da planta  $y[k + \delta]$  para a referência  $r[k]$  no instante futuro  $k + \delta$ .

Antes de utilizar a lei de controle gerada pela ESN para controlar o sistema, o sinal  $u_2$  é ativado considerando a função definida em (21), garantindo que  $u_2 \in \mathcal{U}$ .

## 5. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Considere o sistema descrito pelo modelo simplificado de um poço de produção de petróleo com uma bomba elétrica submersível (*Electric Submersible Pump* - ESP) para elevação artificial de fluidos (Pavlov et al., 2014; Binder et al., 2015):

$$\begin{cases} \dot{p}_{bh} = \frac{\beta_1}{V_1} (q_r - q) \\ \dot{p}_{wh} = \frac{\beta_2}{V_2} (q - q_c) \\ \dot{q} = \frac{1}{M} (p_{bh} - p_{wh} - \rho g h_w - \Delta p_f + \Delta p_p) \end{cases} \quad (22)$$

com  $q_r = PI(p_r - p_{bh})$ ,  $q_c = C_c \sqrt{p_{wh} - p_m} z$ ,  $\Delta p_f = 2,4453 \cdot 10^7 q^2$  e  $\Delta p_p = -2,4228 \cdot 10^{10} q^2 + 1,6778 \cdot 10^6 q f + 2,4714 \cdot 10^3 f^2$ . As variáveis e parâmetros de (22) podem ser obtidos de Binder et al. (2015). Além disso, considerou-se a pressão do reservatório  $p_r = 1,2 \cdot 10^7$  Pa, a pressão do coletor  $p_m = 2 \cdot 10^6$  Pa e a frequência da ESP sendo  $f = 55$  Hz.

Neste exemplo, o objetivo do controle é regular a saída do sistema,  $\tilde{y} = p_{bh}$ , em torno de um ponto de equilíbrio, por meio da determinação de um sinal de controle em tempo discreto, utilizando a estratégia descrita na Seção 4.

Para atingir esse objetivo, consideram-se as variáveis de estado  $\tilde{x} = [p_{bh} \ p_{wh} \ q]^T$ , a entrada de controle  $\tilde{u} = z$ , definida como a abertura da válvula *choke*, e a perturbação exógena  $\tilde{d} = q_r$ , que representa o influxo do reservatório para o poço. Então, o sistema (22) é traduzado para a origem considerando  $x = \tilde{x} - \bar{x}$ ,  $u = \tilde{u} - \bar{u}$ ,  $d = \tilde{d} - \bar{d}$ , onde  $\bar{x}$  é o ponto de equilíbrio das variáveis de estado,  $\bar{u}$  é o ponto de operação da entrada de controle, e  $\bar{d}$  é o valor nominal da perturbação. Neste exemplo, considera-se a seguinte condição operacional:  $\bar{x}_1 = 71,4686$  [bar],  $\bar{x}_2 = 32,6771$  [bar],  $\bar{x}_3 = 40,5334$  [m<sup>3</sup>/h],  $\bar{u} = 0,5$  e  $\bar{d} = 120$  [bar]. Ao adicionar um integrador ao sistema, reescrever as não-linearidades em função de parâmetros  $\theta$ , de forma que ele possa ser representado na forma quase-linear de (9), e em seguida aplicar a aproximação de Euler  $x_+ = x + T_s \dot{x}(t)$  para um período de amostragem  $T_s = 0,2$  s, obtêm-se o sistema em tempo discreto definido pelas matrizes apresentadas em (23), considerando pressões em bar e vazões em m<sup>3</sup>/h e os parâmetros definidos na Tabela 1.

$$A(x, \theta) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 + a_4 \theta_1 & a_5 & 0 \\ a_6 & a_7 & a_8 + a_9 x_3 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_u(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{u1} + b_{u2} \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d(\theta) = B_d = \begin{bmatrix} b_{d1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B_w(\theta) = [\eta_u B_u(\theta) \ \eta_d B_d], \quad \theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T \\ \theta_1 = 25,2 \left( (0,07888x_2 + 1)^{1/2} - 1 \right) x_2^{-1} - 1 \\ \theta_2 = (0,07888x_2 + 1)^{1/2} - 0,998$$

Tabela 1. Parâmetros para as matrizes do sistema.

$a_1$	0,82832	$a_2$	-0,20556	$a_3$	0,86225
$a_4$	-0,13775	$a_5$	0,08565	$a_6$	0,36144
$a_7$	-0,36144	$a_8$	0,54432	$a_9$	-0,00676
$a_{10}$	-0,2	$b_{u1}$	-6,92991	$b_{u2}$	-6,94374
$b_{d1}$	0,17168	$\eta_u$	0,14142	$\eta_d$	0,14142

Neste exemplo, consideram-se os seguintes limites operacionais:  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_1| \leq 4,8531, |x_2| \leq 2,7323 \text{ e } |x_3| \leq 1,9467\}$ ;  $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{R} : |d| \leq 0,1\}$ ; e  $\mathcal{U} = \{u_2 \in \mathbb{R} : |u_2| \leq 0,1\}$ . Pela definição dos parâmetros variantes em (23) e os limites operacionais acima definidos, obtêm-se que  $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1| \leq 0,05436, |\theta_2| \leq 0,10450\}$ .

Para projetar o controlador robusto, considerando a lei de controle amostrada

$$u(t) = u[kT_s], \quad \forall t \in [kT_s, (k+1)T_s), \quad k \geq 0, \quad (24)$$

as matrizes do sistema são reescritas na forma

$$\begin{cases} A(x, \theta) = A_0(\theta) + \Pi(x, \theta)^T A_1(\theta) \\ 0_{4 \times 4} = \Omega_0(x, \theta) + \Omega_1(x, \theta) \Pi(x, \theta) \end{cases}$$

onde  $A_0(\theta) = A_0$ ,  $A_1(\theta) = A_1$  e

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_6 & a_7 & a_8 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Pi(x, \theta) = [x_3 \otimes I_4 \quad \theta_1 \otimes I_4]^T,$$

$$\Omega_0(x, \theta) = \Pi(x, \theta) \text{ e } \Omega_1(x, \theta) = -I_4.$$

Logo, o problema de otimização (20) é resolvido com uma busca linear sobre  $\mu \in (0,1)$ , resultando na lei de controle robusta  $u = (K_0 + K_1 \Pi(x, \theta))x = K(x, \theta)x$  para  $\mu = 0,456$ , com

$$K(x, \theta) = \begin{bmatrix} 0,000363\theta_1 - 5,57 \cdot 10^{-6}x_3 + 0,58 \\ -0,0184\theta_1 - 5,69 \cdot 10^{-6}x_3 + 0,209 \\ 7,62 \cdot 10^{-5}\theta_1 + 0,00169x_3 - 0,248 \\ -0,000532\theta_1 + 8,1 \cdot 10^{-6}x_3 - 0,873 \end{bmatrix}^T$$

e a estimativa da região de atração dada por  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 13,6x_1^2 + 3,165x_1x_2 - 9,781x_1x_3 - 38,78x_1x_4 + 0,3667x_2^2 - 1,329x_2x_3 - 4,615x_2x_4 + 2,073x_3^2 + 13,94x_3x_4 + 29,25x_4^2 \leq 1\}$ .

Assim, para treinar o controlador baseado em ESN, um conjunto de dados com 2496 amostras foi construído com base em simulações do sistema em malha fechada (ou seja, com  $u[k] = u_1[k]$ ), considerando  $w$  e  $u_2$  como ruídos brancos filtrados com frequências de corte definidas levando em conta perturbações de baixa frequência. Além disso, os seguintes hiperparâmetros foram assumidos para a ESN: (i) raio espectral  $\rho = 0,57$ ; (ii) tamanho do reservatório  $N = 90$ ; (iii) *leak rate*  $\gamma = 0,967$ ;

e (iv) densidade do reservatório de 0,785. Esses parâmetros e o número de saídas passadas ( $m = 3$ ) e atraso ( $\delta = 1$ ) foram ajustados com base no valor RMS (*root mean square*) da saída do sistema  $y$  ao adicionar a ação de controle ESN (ou seja,  $u = u_1 + u_2$ ) em relação apenas à ação de controle robusta (ou seja,  $u = u_1$ ).

O desempenho do controlador proposto é avaliado considerando simulações numéricas do modelo contínuo da planta e a lei de controle amostrada definida em (22) e (24), respectivamente. Em particular, a Figura 2 mostra as propriedades de atenuação de perturbações do controlador proposto (ou seja,  $u = u_1 + u_2$ ) em comparação com a ação de controle robusta apenas (ou seja,  $u = u_1$ ).

Os resultados mostram que a combinação de ações de controle robustas e ESN superou o desempenho obtido apenas com o controlador robusto por um fator de melhoria de 43,2%, que foi calculado com base no valor RMS da saída do sistema  $y$  ao adicionar a ação de controle ESN à lei de controle robusta em relação ao controlador robusto apenas (que foi a mesma métrica utilizada para determinar os hiperparâmetros  $\delta$  e  $m$  para treinar o controlador baseado em ESN).

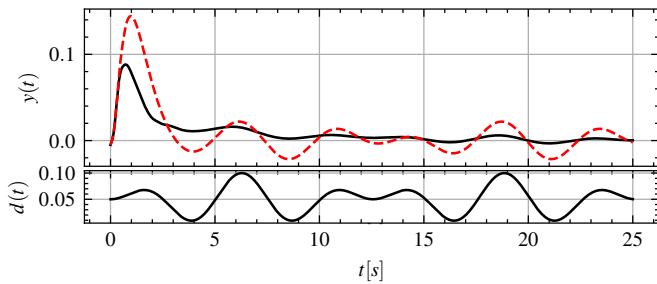


Figura 2. Resposta do sistema em malha fechada (na parte superior da figura) considerando  $u = u_1$  (linha tracejada vermelha) e  $u = u_1 + u_2$  (linha sólida preta) para  $x_0^T = [-0,005 \ 0,01 \ -0,015 \ 0,2]$  e o sinal de perturbação (parte inferior da figura) definido como  $d(t) = 0,05(1 + \text{sen}(1,25t)\text{sen}(0,25t))$ .

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo propôs uma estratégia de controle robusta com capacidades de aprendizado (baseada em ESNs) para estabilizar uma classe de sistemas polinomiais incertos discretos no tempo, sujeitos a perturbações de magnitude desconhecida e limitadas. Em primeiro lugar, é projetado uma realimentação de estados não-linear para garantir que a trajetória do estado, conduzida por condições iniciais não nulas e perturbações persistentes, seja limitada a um conjunto positivamente invariante, independentemente da lei de controle da ESN (assumindo uma ação limitada). Em segundo lugar, o controlador baseado em ESN é treinado para mitigar os efeitos das perturbações na saída do sistema. Um sistema de extração de petróleo com uma bomba submersa é utilizado para demonstrar a eficácia da técnica de controle proposta. Pesquisas futuras se concentrarão em desenvolver um controlador com capacidade de aprendizado online.

## REFERÊNCIAS

Banderchuk, A., Coutinho, D., and Camponogara, E. (2023). Combining robust control and machine learning for uncertain

- nonlinear systems subject to persistent disturbances. *arXiv preprint arXiv:2303.11890*.
- Barabanov, N.E. and Prokhorov, D.V. (2002). Stability analysis of discrete-time recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(2).
- Bengio, Y., Simard, P., and Frasconi, P. (1994). Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult. *IEEE Trans. Neural. Netw. Learn. Syst.*, 5(2).
- Bethge, J., Morabito, B., Matschek, J., and Findeisen, R. (2018). Multi-mode learning supported model predictive control with guarantees. *IFAC-PapersOnLine*, 51(20).
- Binder, B.J., Pavlov, A., and Johansen, T.A. (2015). Estimation of flow rate and viscosity in a well with an electric submersible pump using moving horizon estimation.
- de Souza, C., Coutinho, D., and Gomes da Silva Jr, J. (2015). Local input-to-state stabilization and  $\ell_\infty$ -induced norm control of discrete-time quadratic systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(14).
- Jaeger, H. (2001). The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note. *Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report*, 148(34).
- Jaeger, H. (2002). Adaptive nonlinear system identification with echo state networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 15.
- Jiang, Z.P. and Wang, Y. (2001). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 37(6).
- Jordanou, J., Antonelo, E., and Camponogara, E. (2019). Online learning control with echo state networks of an oil production platform. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 85, 214–228.
- Li, S., Zhou, M., and Luo, X. (2018). Modified primal-dual neural networks for motion control of redundant manipulators with dynamic rejection of harmonic noises. *IEEE Trans. Neural. Netw. Learn. Syst.*, 29(10).
- Mahmoud, T.A. and Elshenawy, L.M. (2015). Echo state neural network based state feedback control for SISO affine nonlinear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11).
- Maiworm, M., Limon, D., and Findeisen, R. (2021). Online learning-based model predictive control with Gaussian process models and stability guarantees. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(18).
- Pan, Y. and Wang, J. (2012). Model predictive control of unknown nonlinear dynamical systems based on recurrent neural networks. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 59(8).
- Pavlov, A., Krishnamoorthy, D., Fjalestad, K., Aske, E., and Fredriksen, M. (2014). Modelling and model predictive control of oil wells with electric submersible pumps. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*.
- Revay, M., Wang, R., and Manchester, I.R. (2021). A convex parameterization of robust recurrent neural networks. *IEEE Control Systems Letters*, 5(4).
- Sun, C., Song, M., Cai, D., Zhang, B., Hong, S., and Li, H. (2022). A systematic review of echo state networks from design to application. *IEEE Trans. Artif. Intell.*
- Waegeman, T., Wyffels, F., and Schrauwen, B. (2012). Feedback control by online learning an inverse model. *IEEE Trans. Neural. Netw. Learn. Syst.*, 23(10).
- Zenati, A., Aouf, N., de la Llana, D.S., and Bannani, S. (2022). Validation of neural network controllers for uncertain systems through keep-close approach: Robustness analysis and safety verification. *arXiv preprint arXiv:2212.06532*.