

Estabilização via realimentação estática de saída de ciclos limites para sistemas afins com comutação a tempo discreto^{*}

Regiane A. Hirata,^{*} Grace S. Deaecto,^{*}
Marcelo C. M. Teixeira^{**}

^{*} Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, SP,
r141692@dac.unicamp.br, gracefem@unicamp.br

^{**} Faculdade de Engenharia, FEIS-UNESP, Ilha Solteira, SP,
marcelo@dee.feis.unesp.br

Abstract: This paper deals with control design of a static output-dependent switching function for discrete-time switched affine systems to ensure global asymptotic stability of a suitable limit cycle. In a first step, a family of limit cycles that satisfy some performance criterion of interest is determined. This criterion is defined by the designer and is related to the steady-state response, as for instance, the maximum ripple. Afterwards, based on a time-varying convex Lyapunov function, a set of convex sub-problems, expressed in terms of linear matrix inequalities, is provided to determine an output-dependent switching function. This function must be associated to the limit cycle, inside the family of possible ones, that minimises an upper bound to the \mathcal{H}_2 performance index. An academic example is used for validation and comparison.

Resumo: Este artigo propõe o projeto de uma função de comutação via realimentação estática de saída para sistemas afins com comutação a tempo discreto de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite adequado. Primeiramente, uma família de ciclos limites que satisfazem algum critério de desempenho de interesse é determinada. Este critério é definido pelo projetista e está relacionado ao desempenho do sistema em regime permanente, como por exemplo o máximo *ripple*. Posteriormente, baseado em um função de Lyapunov convexa variante no tempo, um conjunto de sub-problemas convexos, expressos em termos de desigualdades matriciais lineares, é proposto para o projeto de uma função de comutação dependente da saída. Esta função deve estar associada ao ciclo limite, pertencente à família de ciclos possíveis, que minimiza um limitante superior do índice de desempenho \mathcal{H}_2 . Um exemplo acadêmico é usado para validação e comparação.

Keywords: Switched affine systems; limit cycle stabilisation; static output feedback, discrete-time domain.

Palavras-chaves: Sistemas afins com comutação; estabilização de ciclo limite; realimentação estática de saída, domínio do tempo discreto.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas híbridos são aqueles definidos pela interação entre dinâmicas contínuas e eventos discretos, Liberzon (2003). Uma subclasse de grande interesse são os sistemas com comutação, que possuem grande aplicabilidade prática em diversas áreas do conhecimento, que abrangem desde sistemas biológicos Parise et al. (2018), a modelos em eletrônica de potência e máquinas elétricas Albea et al. (2021), Sferlazza et al. (2019), Egidio et al. (2022). Estes sistemas são compostos por um número finito de subsistemas e por uma regra (ou função) de comutação, responsável por selecionar um subsistema a cada instante de tempo Liberzon (2003), Sun and Ge (2011). No nosso contexto de interesse essa regra atua como um sinal de controle

a ser projetado para garantir estabilidade e desempenho ao sistema global. O foco de interesse neste trabalho são os sistemas com comutação que apresentam termos afins na sua equação dinâmica. Eles são responsáveis pela existência de um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis formando uma região no espaço de estado. Como na maioria dos casos o ponto de equilíbrio desejado não coincide com nenhum dos pontos de equilíbrio dos subsistemas, a estabilidade assintótica só é assegurada considerando uma frequência de comutação arbitrariamente elevada (Deaecto et al. (2010) e Bolzern and Spinelli (2004)), que pode não ser viável em situações reais, devido à necessidade de respeitar limitações físicas dos equipamentos, como o tempo de resposta das chaves eletrônicas ou o período de amostragem em conversores A/D.

Quando a frequência de comutação é limitada, o que sempre ocorre em sistemas a tempo discreto, uma alternativa é estudar estabilidade prática. Neste tipo de estabilidade,

^{*} Esta pesquisa foi financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processos 305951/2022-0 e 309872/2018-9, e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), código 001.

as trajetórias são guiadas para uma região de atração invariante, tão pequena quanto possível, contendo o ponto de equilíbrio de interesse. As referências Sanchez et al. (2019), Deaecto and Egidio (2016) e Hetel and Fridman (2013) são alguns exemplos em que o projeto é realizado levando em conta estabilidade prática do sistema. Contudo, o inconveniente desta abordagem, é que não é possível concluir sobre o desempenho do sistema no regime permanente, uma vez que nada pode ser dito a respeito da trajetória quando ela está no interior do conjunto invariante. Além disso, não é possível considerar índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que são importantes para melhorar o desempenho no regime transitório e dar robustez ao sistema, mas exigem a garantia de estabilidade assintótica. Para contornar esse problema, uma abordagem recente é fornecer condições que garantem a estabilidade assintótica de ciclos limites, conforme Benmiloud et al. (2019), Serieye et al. (2023) e Egidio et al. (2020). A determinação de um ciclo limite adequado permite ter total controle a respeito do regime permanente. Além disso, a estabilidade assintótica viabiliza a consideração de índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Neste contexto, a referência Benmiloud et al. (2019) trata estabilidade assintótica local de ciclos limites, Egidio et al. (2020) fornece condições para estabilidade assintótica global, levando em consideração índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e Serieye et al. (2023) propõe condições alternativas às anteriores, mas sem considerar índices de desempenho. Em todas estas referências, o estado é suposto disponível para realimentação.

No presente trabalho, nosso objetivo é generalizar os resultados obtidos em Egidio et al. (2020) para tratar estabilização de ciclos limites via realimentação estática de saída. Este problema ainda não foi considerado no contexto de sistemas afins a tempo discreto, mas já foi tratado em Carniato et al. (2020) no contexto de sistemas lineares com comutação a tempo contínuo. Como passo preliminar, vamos retomar as condições de projeto via realimentação de estado de Egidio et al. (2020) e incluir um custo garantido nas condições de Serieye et al. (2023) para fins de comparação de ambas as estratégias. Posteriormente, vamos obter condições suficientes, expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs), para projetar uma função de comutação do tipo mínimo, dependente apenas da saída medida, sem nenhuma estrutura dinâmica adicional. Essa regra deve garantir estabilidade assintótica global de um ciclo limite de interesse, e um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada.

Notação: \mathbb{R} e \mathbb{N} representam números reais e naturais, respectivamente. $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ é composto pelos N primeiros números naturais positivos. Para vetores e matrizes reais, $(\cdot)'$ indica a sua transposta. Para matrizes simétricas, (\bullet) denota um bloco simétrico. Para qualquer matriz simétrica, $X > (<)0$ denota uma matriz definida positiva (negativa). O traço de uma matriz é representado por $\text{tr}(X)$. $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i = 1\}$ denota o simplex unitário. A combinação convexa de matrizes $X_i, \forall i \in \mathbb{K}$, é $X_\lambda = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i X_i, \lambda \in \Lambda$. A norma quadrada de $z[n]$, $n \in \mathbb{N}$, é $\|z\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|z[n]\|^2$, em que $\|z\|^2 = z'z$. O conjunto de trajetórias z que satisfazem $\|z\|_2^2 < \infty$ é definido por L_2 . O operador módulo é $c = a \bmod b$, sendo c o resto da divisão Euclidiana de entre os inteiros a e b . Por fim, para um $\kappa \in \mathbb{N}$ positivo, define-se $k(n) = n \bmod \kappa$.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o sistema afim com comutação a tempo discreto

$$x[n+1] = A_{\sigma[n]}x[n] + b_{\sigma[n]} + H_{\sigma[n]}w[n] \quad (1)$$

$$y[n] = C_{\sigma[n]}x[n] \quad (2)$$

$$z[n] = E_{\sigma[n]}x[n] + G_{\sigma[n]}w[n] \quad (3)$$

definido para todo $n \in \mathbb{N}_- = \mathbb{N} \cup \{-1\}$, em que $x[n] \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w[n] \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa, $y[n] \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $z[n] \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada. A função de comutação ($\sigma[n] : \mathbb{N}_- \rightarrow \mathbb{K}$) é responsável por selecionar um dos N subsistemas a cada instante de tempo. Ela é a única variável de controle $\sigma[n] = u(y[n]) \in \mathbb{K}$ e deve ser projetada de forma a garantir estabilidade e desempenho do sistema global.

O ciclo limite é uma solução periódica com período $\kappa > 0$ do sistema autônomo

$$x_e[n+1] = A_{\sigma[n]}x_e[n] + b_{\sigma[n]} \quad (4)$$

associado a uma sequência periódica $\sigma[n] = c[k(n)]$, com $c = (c[0], \dots, c[\kappa-1]) \in \mathbb{K}^\kappa$ e é definido por

$$\mathcal{X}_e(c) = \{x_e[k(n)] : (4), n \in \mathbb{N}_-\} \quad (5)$$

O período fundamental ($x_e[0], \dots, x_e[\kappa-1]$) é determinado a partir de uma das N^κ sequências periódicas de comutação $\sigma[n] = c[k(n)]$, escolhida pelo projetista. Este ponto será explorado mais adiante na Seção 2.1, e também está disponível em Egidio et al. (2020).

Definindo a variável auxiliar $\xi[n] = x[n] - x_e[n]$, obtemos o sistema equivalente

$$\xi[n+1] = A_{\sigma[n]}\xi[n] + \ell_{\sigma[n]}[n] + H_{\sigma[n]}w[n] \quad (6)$$

$$y_e[n] = C_{\sigma[n]}\xi[n] \quad (7)$$

$$z_e[n] = E_{\sigma[n]}\xi[n] + G_{\sigma[n]}w[n] \quad (8)$$

com $\ell_i[n] = A_i x_e[n] - x_e[n+1] + b_i$, $i \in \mathbb{K}$, $y_e[n] = y[n] - C_{\sigma[n]}x_e[n]$ e $z_e[n] = z[n] - E_{\sigma[n]}x_e[n]$, $\forall n \in \mathbb{N}_-$. Note que $\xi[n] \rightarrow 0$ sempre que $x[n] \rightarrow x_e[k(n)]$. Logo, estudar a estabilização do ponto de equilíbrio $\xi = 0$ é equivalente a assegurar a estabilização do ciclo limite $x_e[k(n)]$ para algum $c[k(n)]$.

Nosso principal objetivo neste artigo é generalizar os resultados de Egidio et al. (2020), que trata exclusivamente realimentação de estado, para abordar o projeto de controle via realimentação estática de saída do sistema (6)-(8). Mais especificamente, desejamos projetar uma função de comutação dependente diretamente da saída medida, $\sigma[n] = u(y[n])$, sem considerar nenhuma estrutura dinâmica adicional, com $u(y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$, de forma a garantir estabilidade assintótica global da origem $\xi = 0$, o que equivale à estabilidade assintótica global do ciclo limite de interesse $\mathcal{X}_e(c)$. O projeto deve levar em conta a minimização de um limitante superior do índice de desempenho \mathcal{H}_2 que, como conhecido na literatura, é definido para sistemas assintoticamente estáveis e não podem ser calculados para a estabilidade prática.

O índice de desempenho \mathcal{H}_2 considera o sistema (6)-(8) com $\xi[-1] = 0$ e sujeito a entrada $w[n] = \delta[n+1]e_r$, com e_r sendo a r -ésima coluna da matriz identidade e $\delta[n]$ o impulso a tempo discreto e é definido por

$$J_2(\sigma) = \sum_{r=1}^{n_w} \|z_{er}\|_2^2 + e_r' G'_{\sigma[-1]} G_{\sigma[-1]} e_r \quad (9)$$

em que z_{er} é a saída controlada correspondente ao impulso aplicado no r -ésimo canal da entrada externa. Veja Geromel et al. (2008) e Egidio et al. (2020) para mais detalhes.

2.1 Geração de Ciclo Limite

Defina o conjunto $\mathfrak{C}(\kappa) = \mathbb{K}^\kappa$ com N^κ elementos $c = (c[0], \dots, c[\kappa - 1]) \in \mathfrak{C}(\kappa)$ cada um associado a um ciclo limite candidato $\mathcal{X}_e(c)$. Os primeiros κ pontos $x_e[n]$ com $n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ são obtidos como solução da equação linear

$$\mathbf{A}(c)\mathbf{x}_e = -\mathbf{b}(c) \quad (10)$$

com $\mathbf{x}_e = [x_e[0]' \ x_e[1]' \ \dots \ x_e[\kappa - 1]']'$ e

$$\mathbf{A}(c) = \begin{bmatrix} A_{c[0]} & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{c[1]} & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I & 0 & 0 & \cdots & A_{c[\kappa-1]} \end{bmatrix}, \mathbf{b}(c) = \begin{bmatrix} b_{c[0]} \\ b_{c[1]} \\ \vdots \\ b_{c[\kappa-1]} \end{bmatrix}$$

Esta equação foi obtida a partir de (4) com $\sigma[n] = c[k(n)]$ e levando em consideração a condição $x_e[0] = x_e[\kappa]$. Podemos concluir, pela solução da equação linear (10), que $\det(\mathbf{A}(c)) \neq 0$ implica que a sequência periódica $c = (c[0], \dots, c[\kappa - 1]) \in \mathfrak{C}(\kappa)$ gera um único ciclo limite $\mathcal{X}_e(c)$ para o sistema.

De todas as possíveis candidatas $\mathfrak{X} = \{\mathcal{X}_e(c), c \in \mathfrak{C}(\kappa)\}$ é considerado um subconjunto de interesse $\mathfrak{X}_s \subset \mathfrak{X}$ acompanhado do seu conjunto associado $\mathfrak{C}_s(\kappa) \subset \mathfrak{C}(\kappa)$ que satisfaça algum critério definido pelo projetista, como por exemplo o máximo *ripple*

$$\mathfrak{X}_s = \left\{ \mathcal{X}_e \in \mathfrak{X} : \max_{n \in \{0, \dots, \kappa-1\}} \|\Gamma(x_e[n] - x_*)\|_\infty < 1 \right\} \quad (11)$$

onde x_* é o ponto de referência escolhido pelo projetista. Este critério seleciona os ciclos limites cujas amplitudes de *ripple* no regime permanente são menores que 1. A matriz Γ é fornecida pelo projetista e permite otimizar o comportamento do regime permanente de somente uma componente ou de uma combinação de componentes do estado. Note que o período κ é escolhido pelo projetista de forma a obter um conjunto não vazio de \mathfrak{X}_s . No caso em que conjunto \mathfrak{X}_s não é vazio, nem unitário, o ciclo limite escolhido é aquele pertencente a \mathfrak{X}_s com o menor custo garantido \mathcal{H}_2 .

3. RESULTADOS PRELIMINARES

Vamos considerar o sistema

$$\xi[n+1] = A_{\sigma[n]}\xi[n] + \ell_{\sigma[n]}[n] \quad (12)$$

$$y_e[n] = C_{\sigma[n]}\xi[n] \quad (13)$$

$$z_e[n] = E_{\sigma[n]}\xi[n] \quad (14)$$

definido para $n \in \mathbb{N}$ e evoluindo de uma condição inicial arbitrária $\xi[0] = x[0] - x_e[0]$.

3.1 Realimentação de estado

Neste primeiro momento, vamos considerar que o estado está disponível $y_e[n] = \xi[n]$ e retomar o projeto via realimentação de estado proposto em Egidio et al. (2020) que é baseado na função de Lyapunov convexa e variante no tempo

$$v(\xi[n], n) = \xi[n]'P[n]\xi[n] \quad (15)$$

em que as matrizes $P[n] = P[k(n)]$ são definidas positivas e periódicas, com período $\kappa > 0$. As condições estão apresentadas no teorema a seguir que utiliza

$$\mathcal{M}_i[n] = \begin{bmatrix} A_i'P[n+1]A_i - P[n] & \bullet \\ \ell_i[n]'P[n+1]A_i & \ell_i[n]'P[n+1]\ell_i[n] \end{bmatrix} \quad (16)$$

para a definição da função de comutação.

Teorema 1. Considere o sistema (12)-(14) com $C_i = I$, $\forall i \in \mathbb{K}$, $\kappa > 0$ e o subconjunto de ciclos limites $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ com as sequências periódicas associadas $c \in \mathfrak{C}_s$ dados. Se existirem $P[n] > 0$ satisfazendo o problema de otimização

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{P[n] > 0} (x[0] - x_e[0])'P[0](x[0] - x_e[0]) \quad (17)$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$A_{c[n]}'P[n+1]A_{c[n]} - P[n] + E_{c[n]}'E_{c[n]} < 0 \quad (18)$$

em que $n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ e $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$, com a condição de contorno $P[0] = P[\kappa]$, então a função de comutação $\sigma[n] = u(\xi[n])$ com

$$u(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix}' \mathcal{M}_i[k(n)] \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

assegura que o ciclo limite $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e^*(c)$ solução de (17) é globalmente assintoticamente estável e

$$\|z_e\|_2^2 < (x[0] - x_e[0])'P[0](x[0] - x_e[0]) \quad (20)$$

é um custo garantido de desempenho.

Prova: Disponível em Egidio et al. (2020). \square

Para fins de comparação, vamos incluir um custo garantido nas condições de projeto propostas na referência Serieye et al. (2023), que não levou em consideração a otimização de nenhum critério de desempenho. Nesta referência, a função de Lyapunov é dada por

$$\nu(x[n]) = \min_{i \in \{0, \dots, \kappa-1\}} (x[n] - x_e[i])'P[i](x[n] - x_e[i]) \quad (21)$$

$n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ e $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$, com a condição de contorno $P[0] = P[\kappa]$. Definindo a função

$$\mathcal{L}_i[n] = A_i'P[n+1]A_i - P[n] + E_i'E_i \quad (22)$$

o próximo teorema apresenta um custo garantido para as condições de Serieye et al. (2023).

Teorema 2. Considere o sistema (1)-(3) com $w = 0$ e $C_i = I$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e defina $z_e[n, \theta] = C_{c[\theta]}(x[n] - x_e[\theta])$ com $\theta \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ a ser definido pela regra de comutação. Dados $\kappa > 0$ e o subconjunto de ciclos limites $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ com as sequências periódicas associadas $c \in \mathfrak{C}_s$, se existirem $P[n] > 0$ satisfazendo o problema de otimização

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \min_{i \in \{0, \dots, \kappa-1\}} \inf_{P[i] > 0} (x[0] - x_e[i])'P[i](x[0] - x_e[i]) \quad (23)$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares (18) em que $n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ e $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$, com a condição de contorno $P[0] = P[\kappa]$, então a função de comutação $\sigma[n] = u(x)$ com

$$u(x) = \left\{ c[\theta], \theta = \arg \min_{i \in \{0, \dots, \kappa-1\}} (x - x_e[i])'P[i](x - x_e[i]) \right\} \quad (24)$$

assegura que o ciclo limite $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e^*(c)$ solução de (23) é globalmente assintoticamente estável e

$$\|z_e\|_2^2 < \min_{i \in \{0, \kappa-1\}} (x[0] - x_e[i])'P[i](x[0] - x_e[i]) \quad (25)$$

é um custo garantido de desempenho.

Prova: Considere uma trajetória arbitrária do sistema (1)-(3) e defina $\Delta\nu(x[n]) = \nu(x[n+1]) - \nu(x[n])$ e $\mathbb{K}_\theta = \{0, \dots, \kappa - 1\}$. A função de Lyapunov (21) e a regra de comutação associada (24) fornecem

$$\begin{aligned} \Delta\nu(x) &= \min_{i \in \mathbb{K}_\theta} (x[n+1] - x_e[i])' P[i] (x[n+1] - x_e[i]) - \\ &\quad - (x[n] - x_e[\theta])' P[\theta] (x[n] - x_e[\theta]) \\ &\leq (x[n] - x_e[\theta])' \mathcal{L}_{c[\theta]} [\theta] (x[n] - x_e[\theta]) - z_e[n]' z_e[n] \\ &< -z_e[n]' z_e[n] \end{aligned} \quad (26)$$

Definindo $\zeta[n, \theta] = x[n] - x_e[\theta]$, a primeira desigualdade vem do fato de que

$$\begin{aligned} \nu(x[n+1]) &\leq \zeta[n+1, \theta+1]' P[\theta+1] \zeta[n+1, \theta+1] \\ &= \zeta[n, \theta]' A_{c[\theta]} P[\theta+1] A_{c[\theta]} \zeta[n, \theta] \end{aligned} \quad (27)$$

em que a desigualdade em (27) é uma consequência do operador mínimo e a igualdade é obtida como consequência do fato de que $x[n+1] = A_{c[\theta]} x[n] + b_{c[\theta]}$, devido à regra de comutação (24), e $x_e[\theta+1] = A_{c[\theta]} x_e[\theta] + b_{c[\theta]}$. A última desigualdade de (26) decorre da validade de (18). Agora, somando ambos os lados de (26) para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|z_e\|_2^2 < \nu(x[0])$ o que conclui a prova do teorema. \square

Embora ambos os teoremas apresentem regras de comutação diferentes, eles são baseados nas mesmas condições suficientes (18). No que se refere ao custo garantido, note que se uma sequência periódica $c_* \in \mathfrak{C}_s$ está associada ao ciclo $\mathcal{X}_e(c)$ que atende ao critério (11) então todas as sequências deslocadas de c_* também pertencem ao conjunto \mathfrak{C}_s . Neste caso, os custos garantidos (20) e (25) são idênticos. Logo, (19) e (24) são estratégias de comutação diferentes que podem ter vantagens ou desvantagens a depender da aplicação. A estratégia (19), por exemplo, é mais simples de ser generalizada para tratar realimentação estática de saída, como ficará claro em seguida.

4. RESULTADOS PRINCIPAIS

4.1 Realimentação de saída

Nesta seção, nosso objetivo é generalizar as condições do Teorema 1 para o projeto de uma função de comutação $\sigma[n] = u(y[n])$ que considera o caso em que o estado não está disponível para realimentação. O teorema a seguir apresenta este resultado.

Teorema 3. Considere o sistema (12)-(14), $\kappa > 0$ e o subconjunto de ciclos limites $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ com as sequências periódicas associadas $c \in \mathfrak{C}_s$ dados. Se existirem matrizes simétricas $P[n] > 0$, $R_i[n]$ e $U[n]$ formando o conjunto solução Ψ do problema de otimização

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{\Psi} (x[0] - x_e[0])' P[0] (x[0] - x_e[0]) \quad (28)$$

sujeito às desigualdades matriciais

$$\mathcal{L}_i[n] < U[n] + C_i' R_i[n] C_i \quad (29)$$

$$U[n] + C_{c[n]}' R_{c[n]} C_{c[n]} < 0 \quad (30)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, $n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ e $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$, com a condição de contorno $P[0] = P[\kappa]$, então a função de comutação dependente da saída $\sigma[n] = u(y[n])$ dada por

$$u(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} y_e[n] \\ \ell_i[k(n)] \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R_i[k(n)] & \bullet \\ V_i[k(n)] & W_i[k(n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e[n] \\ \ell_i[k(n)] \end{bmatrix} \quad (31)$$

com as matrizes

$$V_i[n] = P[n+1] A_i C_i' (C_i C_i')^{-1} \quad (32)$$

$$W_i[n] = P[n+1] - \mathcal{J}_i[n] \mathcal{V}_i[n]^{-1} \mathcal{J}_i[n]' + \varepsilon I \quad (33)$$

sendo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, $\mathcal{V}_i[n] = \mathcal{L}_i[n] - U[n] - C_i' R_i[n] C_i < 0$ e $\mathcal{J}_i[n] = P[n+1] A_i - V_i[n] C_i$, garante que o ciclo limite $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e(c)$, solução de (28), é globalmente assintoticamente estável e

$$\|z_e\|_2^2 < (x[0] - x_e[0])' P[0] (x[0] - x_e[0]) \quad (34)$$

é um custo garantido de desempenho.

Prova: Para facilitar a notação definimos $\xi[n] = \xi$, $\sigma[n] = \sigma$, $\ell_i[n] = \ell_i$ e o operador diferencial $\Delta v = v(\xi[n+1], n+1) - v(\xi[n], n)$, que para uma trajetória arbitrária fornece

$$\begin{aligned} \Delta v &= \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_\sigma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{L}_\sigma[n] & \bullet \\ P[n+1] A_\sigma & P[n+1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_\sigma \end{bmatrix} - z_e' z_e \\ &< \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_\sigma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} U[n] + C_\sigma' R_\sigma C_\sigma & \bullet \\ V_\sigma[n] C_\sigma & W_\sigma[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_\sigma \end{bmatrix} - z_e' z_e \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_i \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} U[n] + C_i' R_i C_i & \bullet \\ V_i[n] C_i & W_i[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \ell_i \end{bmatrix} - z_e' z_e \\ &\leq \xi' (U[n] + C_{c[n]}' R_{c[n]} C_{c[n]}) \xi - z_e' z_e \\ &< -z_e' z_e \end{aligned} \quad (35)$$

Em (35), a primeira desigualdade é válida sempre que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i[n] & \bullet \\ P[n+1] A_i & P[n+1] \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} U[n] + C_i' R_i C_i & \bullet \\ V_i[n] C_i & W_i[n] \end{bmatrix} \quad (36)$$

é verificada, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$. Escolhendo $V_i[n]$ como em (32), que é a solução que minimiza o erro quadrático da norma $\|\mathcal{J}_i[n]\|$, tem-se que $\mathcal{J}_i[n]$ e $\mathcal{V}_i[n]$ são conhecidos a partir da solução de (29) e (30). Dessa forma, reescrevendo (36) como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_i[n] & \bullet \\ \mathcal{J}_i[n] & P[n+1] - W_i[n] \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

ao fazer o Complemento de Schur em relação a $\mathcal{V}_i[n] < 0$ conclui-se que $W_i[n]$ escolhido como (33) garante que as desigualdades de (36) estão verificadas para todo $i \in \mathbb{K}$. A segunda igualdade em (35) vem da escolha da função de comutação (31). Por fim, a segunda e terceira desigualdades são consequências de que $\ell_{c[n]}[n] = 0$ e que as desigualdades (30) são satisfeitas. Da continuação periódica $P[n] = P[k(n)]$ tem-se que $\Delta v < -z_e' z_e$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Somando-se ambos os lados da última desigualdade de (35) de $n = 0$ até o infinito temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta v = -\xi[0]' P[0] \xi[0] < -\sum_{n=0}^{\infty} \|z_e\|^2 \quad (38)$$

concluindo a prova. \square

Este teorema fornece condições suficientes, na forma de um conjunto finito de soluções de subproblemas convexos expressos em termos de LMIs, para o projeto de uma função de comutação via realimentação estática de saída, o qual minimiza o limite superior da norma quadrada $\|z_e\|_2^2$. Diferente do caso da realimentação de estado apresentada em Egidio et al. (2020), o custo verdadeiro da função de comutação periódica $\sigma[n] = c[k(n)]$ não coincide com o lado direito de (34). Isso ocorre por causa da estrutura imposta às condições de projeto para fazer com que a função de comutação dependa apenas da saída medida $y \in \mathbb{R}^{n_y}$. Note que a mesma estratégia aqui adotada para obter $u(y)$ não é aplicável para a função de comutação (24) do Teorema 2 pois o ciclo $x_e[\theta]$ depende da regra através de θ e aplicar estrutura em $P[n]$ pode tornar a solução muito conservadora.

Uma observação importante sobre este teorema refere-se às matrizes $R_i[n]$ quando $i \neq c[n]$. Observe que em (29)-(30) estas matrizes podem ser quaisquer matrizes grandes o suficiente para satisfazer (29) e que $R_i[n] = \alpha I$ com $\alpha \rightarrow \infty$ é sempre uma solução factível. Porém, com essa escolha a função de comutação é sempre a periódica $\sigma[n] = c[k(n)]$ e as vantagens do controle em malha fechada obtidas a partir da função de comutação são perdidas. Portanto, uma escolha adequada de $R_i[n]$ é importante para melhorar o desempenho real do sistema. Uma alternativa é escolher $R_i[n]$, $i \neq c[n]$ próximo do limiar de factibilidade de (29) como apresentado no corolário introduzido em Daiha and Deaecto (2021), que trata de sistemas com comutação lineares.

Corolário 1. Assuma que existe uma solução $P[n]$, $R_i[n]$ e $U[n]$ para o problema de otimização do Teorema 3 e defina $\Gamma_{1i} = C_i'(C_i C_i')^{-1}$, $\Gamma_{2i} = \mathcal{N}(C_i)$ e

$$Q_i[n] = A_i' P[n+1] A_i - P[n] + E_i' E_i - U[n] \quad (39)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$ e $n \in \{0, \dots, \kappa-1\}$. Então, para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a função de comutação dependente da saída (31) é assintoticamente estabilizante para as matrizes $R_i[n]$ definidas como:

- Para $i \neq c[n]$:

$$R_i[n] = Q_{1i} - Q_{2i}' Q_{3i}^{-1} Q_{2i} + \varepsilon I \quad (40)$$

com $Q_{1i} = \Gamma_{1i}' Q_i[n] \Gamma_{1i}$, $Q_{2i} = \Gamma_{2i}' Q_i[n] \Gamma_{2i}$, $Q_{3i} = \Gamma_{2i}' Q_i[n] \Gamma_{2i} < 0$ quando $\dim(\mathcal{N}(C_i)) \neq 0$ ou

$$R_i[n] = C_i'^{-1} Q_i[n] C_i^{-1} + \varepsilon I \quad (41)$$

caso contrário:

- Para $i = c[n]$, adote a solução do Teorema 3.

Prova: A prova está disponível em Daiha and Deaecto (2021). \square

Esta escolha de $R_i[n]$, $i \neq c[n]$, pode reduzir consideravelmente o custo verdadeiro quando comparado àquele resultante de $\sigma[n] = c[k(n)]$.

A seguir, apresentamos a generalização das condições do Teorema 3 para tratar controle \mathcal{H}_2 via realimentação de saída. Ela se baseia no fato de que o sistema (6)-(8) com $\xi[-1] = 0$ e $w[n] = \delta[n+1]e_r$, sendo e_r a r -ésima coluna da matriz identidade, pode ser escrito de forma equivalente como (12)-(14) quando $\xi[0] = \ell_m[-1] + H_m e_r$ com $\sigma[-1] = m$. O próximo corolário apresenta este resultado.

Corolário 2. O Teorema 3 permanece válido se a função objetivo (28) for substituída por

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{\Psi} \text{tr}((L_m + H_m)' P[0] (L_m + H_m)) \quad (42)$$

com $L_m = [\ell_m[-1] \ \dots \ \ell_m[-1]] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$. Neste caso, a regra de comutação $\sigma[n] = u(y[n])$ com $u(y)$ dado em (31) assegura que o ciclo limite $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e(c)$ é globalmente assintoticamente estável e o limitante superior

$$J_2(\sigma) < \text{tr}((L_m + H_m)' P[0] (L_m + H_m) + G_m' G_m) \quad (43)$$

é válido.

Prova: Da validade das condições do Teorema 3, a estabilidade assintótica está garantida e temos que $\Delta v < -z_{er}' z_{er} \ \forall n \in \mathbb{N}$, com z_{er} sendo a saída associada à entrada $w[n] = \delta[n+1]e_r$. Somando-se ambos os lados desta desigualdade de $n = 0$ até o infinito temos que $\|z_{er}\|_2^2 < v(\xi[0], 0)$ com $\xi[0] = \ell_m[-1] + H_m e_r$. Do índice de performance \mathcal{H}_2 definido em (9), temos

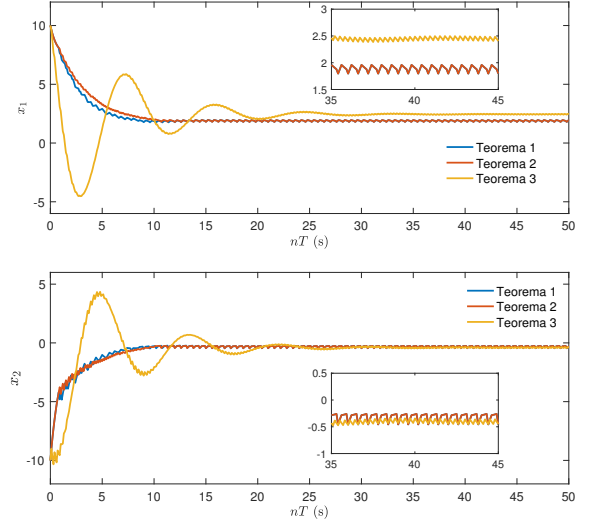


Figura 1. Trajetórias do estado para $u(x)$ relativo às condições de Egidio et al. (2020) (Teor. 1), de Serieye et al. (2023) (Teor. 2) e para $u(y)$ (Teor. 3).

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &= \sum_{r=1}^{n_w} \|z_{er}\|_2^2 + e_r' G_m' G_m e_r \\ &< \sum_{r=1}^{n_w} \xi[0]' P[0] \xi[0] + e_r' G_m' G_m e_r \\ &= \text{tr}((L_m + H_m)' P[0] (L_m + H_m) + G_m' G_m) \quad (44) \end{aligned}$$

concluindo a prova. \square

Note que $\sigma[-1]$ é escolhido pelo projetista e pode, inclusive, ser otimizado de forma a reduzir o custo garantido \mathcal{H}_2 . O próximo exemplo ilustra os resultados aqui apresentados.

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, vamos considerar o sistema afim a tempo contínuo definido em Albea and Seuret (2021) pelas matrizes

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{c2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad b_{c2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad e \quad b_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Um modelo discretizado foi obtido fazendo

$$A_i = e^{A_{ci} T}, \quad b_i = \int_0^T e^{A_{ci} \tau} d\tau b_{ci} \quad (45)$$

com $T = 0.1$ segundos. Todas as simulações numéricas foram realizadas no programa Matlab - R2017a usando as rotinas de LMIs em um computador Apple como sistema operacional Mac OS X, versão 10.15.7.

Primeiramente, comparamos as estratégias de controle para o sistema em que $w[n] = 0$, partindo de $x[0] = [10 \ -10]'$, e definimos $E_i = I$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Resolvemos as condições dos Teoremas 1 e 2 considerando que os estados estão disponíveis $C_i = I$, $i \in \{1, 2, 3\}$ e as condições do Teorema 3 com o Corolário 1 para $C_i = [1 \ 0]$, $i \in \{1, 2, 3\}$, indicando que o segundo estado não está disponível. Nosso objetivo é assegurar estabilidade assintótica de um ciclo limite representando uma solução

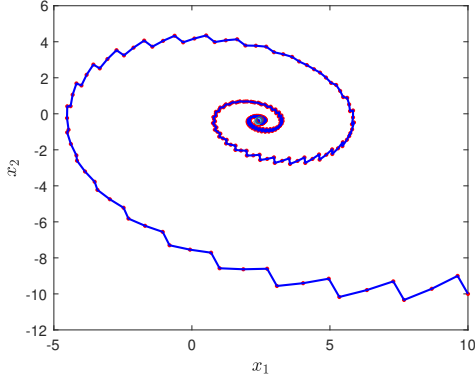


Figura 2. Plano de fase para $u(y)$ (Teor. 3).

periódica em regime permanente com um valor máximo de *ripple* em relação à referência $x_* = [2 \ 0]'$ de 0,5. Isto é obtido escolhendo $\Gamma = 2I$ em (11). Para $\kappa = 6$ obtivemos 106 ciclos limites candidatos compondo o subconjunto \mathfrak{X}_s . Como já esperado, as soluções dos Teoremas 1 e 2 forneceram o mesmo custo garantido $\|z_e\|_2^2 < 2.290,07$, mas custos verdadeiros diferentes $\|z_e\|_2^2 = 1.518,74$ e $\|z_e\|_2^2 = 1.617,78$, respectivamente. Não é possível concluir qual das regras de comutação é melhor, pois para uma outra condição inicial x_0 , o custo verdadeiro do Teorema 2 poderia ser menor. Estas soluções estão associadas à sequência periódica $c = (1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2)$ correspondente ao ciclo $\mathcal{X}_e^*(c)$ dado por

$$\begin{bmatrix} 1.7964 & 1.8759 & 1.9598 & 1.9318 & 1.9044 & 1.8780 \\ -0.4559 & -0.3650 & -0.2827 & -0.2772 & -0.2690 & -0.2581 \end{bmatrix}$$

Para o mesmo subconjunto \mathfrak{X}_s , resolvemos as condições do Teorema 3 junto com o Corolário 1 obtendo os custos $\|z_e\|_2^2 = 3.565,60 < 154.391,64$ associados à sequência periódica $c = (1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3)$ e ao ciclo $\mathcal{X}_e^*(c)$ dado por

$$\begin{bmatrix} 2.4076 & 2.4877 & 2.4499 & 2.4076 & 2.4877 & 2.4499 \\ -0.4440 & -0.3542 & -0.4011 & -0.4440 & -0.3542 & -0.4011 \end{bmatrix}$$

A Figura 1 apresenta as trajetórias dos estados para as três estratégias estudadas. Em todas elas, a estabilidade assintótica dos ciclos limites foram obtidas. A Figura 2 apresenta o plano de fase das trajetórias para as condições do Teorema 3. Considerando agora o sistema (1)-(3) com $H_i = [10 \ -10]'$ e $G_i = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ resolvemos as condições do Corolário 2 para $m = 1$ e obtivemos um custo garantido $J_2(\sigma) < 200.360,64$. Este exemplo mostrou a eficácia da metodologia proposta e uma comparação com outras técnicas da literatura.

6. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou condições suficientes expressas em termos de LMIs para projetar uma função de comutação do tipo mínimo dependente apenas da saída aferida para sistemas afins com comutação. A regra deve garantir a estabilidade assintótica global de um ciclo limite de interesse e, também garantir, um custo garantido \mathcal{H}_2 de desempenho. Um exemplo numérico foi usado para validar a teoria e comparar com outras técnicas da literatura.

REFERÊNCIAS

Albea, C. and Seuret, A. (2021). Time-triggered and event-triggered control of switched affine systems via a

- hybrid dynamical approach. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 41, 101039.
- Albea, C., Sferlazza, A., Gómez-Estern, F., and Francisco, G. (2021). Hybrid modelling and control of a class of power converters with triangular-carrier pwm inputs. *IEEE*, 9, 151607–151620.
- Benmiloud, M., Benalia, A., Djemai, M., and Defoort, M. (2019). On the local stabilization of hybrid limit cycles in switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64, 841–846.
- Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *IEEE Am. Control Conf., 2004*, 3890–3895.
- Carniato, L.A., Carniato, A.A., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., Mainardi Junior, E.I., and Assunção, E. (2020). Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, 93, 1127–1146.
- Daiha, H.R. and Deaecto, G.S. (2021). \mathcal{H}_2 static output feedback switching function design based on a time-varying Lyapunov function approach. *Int. J. Control*, 94(6), 1484–1491.
- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F., and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. *IET Contr. Theory Appl.*, 4, 1201–1210.
- Deaecto, G.S. and Egidio, L. (2016). Practical stability of discrete-time switched affine systems. In *2016 European Control Conference (ECC)*, volume 5, 2048–2053.
- Egidio, L.N., Daiha, H.R., and Deaecto, G.S. (2020). Global asymptotic stability of limit cycle and $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance of discrete-time switched affine systems. *Automatica*, 116, 108927.
- Egidio, L.N., Deaecto, G.S., Hespanha, J.P., and Geromel, J.C. (2022). Trajectory tracking for a class of switched nonlinear systems: Application to pmsm. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 44, 101164.
- Geromel, J.C., Colaneri, P., and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 53(3), 720–733.
- Hetel, L. and Fridman, E. (2013). Robust sampled-data control of switched affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 58, 2922–2928.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, Boston, USA.
- Parise, F., Valcher, M.E., and John, L. (2018). Computing the projected reachable set of stochastic biochemical reaction networks modeled by switched affine systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 63, 3719–3734.
- Sanchez, C.A., Garcia, G., Hadjeras, S., Heemels, W.M.H., and Zaccarian, L. (2019). Practical stabilization of switched affine systems with dwell-time guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64, 4811–4817.
- Serieye, M., Albea-Sanchez, C., Seuret, A., and Jungers, M. (2023). Attractors and limit cycles of discrete-time switching affine systems : nominal and uncertain cases. *Automatica*, 149, 110691.
- Sferlazza, A., Martínez-Salamero, L., Sanchez, C.A., Garcia, G., and Alonso, C. (2019). Min-type control strategy of a DC-DC synchronous boost converter. *IEEE Trans. Ind. Electron.* DOI: 10.1109/TIE.2019.2908597.
- Sun, Z. and Ge, S.S. (2011). *Stability theory of switched dynamical systems*. Springer Science & Business Media.