

Apreçamento de opções americanas utilizando técnicas de parada ótima e redes neurais

José Alex Lima da Fonseca * Oswaldo L. V. Costa **

* *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP, (e-mail: jalexlima.f@gmail.com).*

** *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP, (e-mail: oswaldo@lac.usp.br).*

Abstract:

This paper deals with the pricing of American options by solving an optimal stopping problem. We tested two methods for the optimal stop decision, one based on numerical approximations and the other on a neural network, and compared these methods with the binomial pricing, which is the most common method for pricing American options. In the simulations, assets from the Brazilian market were used, divided into 3 asset classes according to their volatility (low, medium and high). It was observed that the options priced with the use of neural networks present lower RMSE for assets classified with medium volatility, higher RMSE for the high volatility case and lower RMSE in the tails (deep in the money and deep out of the money regions) for the low volatility case.

Resumo: Este artigo aborda o apreçamento de opções americanas através da solução de um problema de parada ótima. Testou-se dois métodos para a decisão de parada ótima, um baseado em aproximações numéricas e outro em uma rede neural, e comparamos essas abordagens com a precificação binomial, que é o método mais comum para a precificação de opções americanas. Utilizaram-se ativos do mercado brasileiro nas simulações, divididos em 3 classes de ativos, de acordo com suas volatilidades (baixa, média e alta). Observou-se que as opções apreçadas utilizando redes neurais apresentam menor EQM para os ativos classificados com volatilidade média, EQM maior para o caso com alta volatilidade, e EQM menores nas “caudas” (regiões deep in the money e deep out of the money) para o caso com baixa volatilidade.

Keywords: American Options; Pricing; Neural Networks; Optimal Stopping; Monte Carlo.

Palavras-chaves: Opções Americanas; Apreçamento; Redes Neurais; Parada ótima; Monte Carlo

1. INTRODUÇÃO

O mercado financeiro está cada vez mais popular, atraindo muitas pessoas que buscam formas de proteção ou ganhos atrativos em seus investimentos. Com o crescente número de investidores nos últimos anos [1], as instituições financeiras buscam apresentar uma maior diversidade de produtos para que seus clientes possam investir da melhor forma possível. Neste cenário desafiador as estratégias com opções (conhecidas como produtos estruturados) estão cada vez mais comuns, pois aumentam e diversificam a gama de investimentos, podendo ser usadas para a proteção do portfólio contra grandes variações nos preços dos ativos, para a obtenção de ganhos alavacados ou mesmo especular sobre a volatilidade de algum papel.

Se, por um lado, a análise de tendência dos preços de ativos (análise gráfica [2], análise fundamentalista [3] e tape reading [4]) é amplamente divulgada em mídias voltadas para o mercado financeiro e é objeto de estudos de matemáticos, estatísticos e outros especialistas de investimento que usam tais modelos para decidir a melhor hora de comprar ou vender um determinado ativo, por outro lado, o mercado ainda carece de modelos difundidos para a análise de momentos ótimos de entrada e saída de estra-

tégias com opções. Problemas desse tipo podem ser vistos como problemas de parada ótima, onde se deseja obter um instante ótimo para a tomada de uma decisão. Apesar de estudos de parada ótima existirem em diversas áreas do conhecimento como economia, estatística, modelagem matemática, etc., eles ainda são considerados como sendo um dos mais desafiadores a serem resolvidos, particularmente quando múltiplos fatores estão envolvidos na tomada de decisão. Para o mercado financeiro o problema de parada ótima pode ser visto como o ponto ótimo de entrada e/ou saída (compra ou venda) de um determinado investimento, maximizando assim os resultados [5].

Ao considerar-se a aplicação de parada ótima no contexto de opções, a abordagem mais comum é para a precificação de opções americanas, onde busca-se maximizar o preço do ativo por meio de uma regra para parada ótima. O método, proposto inicialmente por Longstaff e Schwartz em 2001 [6], simula através de Monte Carlo os possíveis caminhos do ativo, e a decisão de parada é feita via recursividade, ou seja, é utilizado programação dinâmica buscando assim os pontos de parada ótima para cada possível “caminho do ativo objeto”. O método proposto utiliza-se de uma combinação linear de funções de base (Laguerre, Hermite, Legendre etc.) para o cálculo da esperança condicional

usada para que a decisão seja feita. Atualmente, com a popularização das redes neurais nas mais diversas áreas do conhecimento, alguns trabalhos tem mudado as funções polinomiais por uma rede neural na decisão de parada, pois exigem menos iterações computacionais, facilitando assim a implementação deste tipo de algoritmo [5].

Este trabalho propõe-se a fazer um estudo comparativo entre ambas as abordagens com o modelo mais comum (binomial) utilizado para o apreamento de opções americanas, aplicadas ao mercado brasileiro usando dados reais de mercado e estudando a performance do algoritmo em diversos cenários de volatilidade e moneyness (variação dos strikes). A literatura científica sobre este problema está focada em ativos internacionais ou então em supostos ativos e/ou carteira fictícias com dados que não correspondem a realidade de mercado, não fazem simulações em um amplo espectro de strikes e não realizam comparação com outros modelos de apreamento. Resumidamente, as contribuições deste trabalho são:

- Apresenta resultados comparativos entre o modelo padrão (binomial) [7] para precificação de opções americanas e a abordagem proposta por Longstaff e Schwartz [6], incluindo o uso de redes neurais no lugar das funções polinomiais [5].
- O estudo é feito para várias classes de ativos (agrupados por volatilidade) e considera o apreamento de calls e puts, utilizando dados reais de mercado, e com uma amplitude grande de strikes.

Pode-se elencar algumas motivações para realizar um estudo comparativo entre o modelo LSM e método de precificação binomial, que apesar de ser o principal arcabouço para cálculo de preço de opções americanas possui também algumas limitações.

- Modelagem mais flexível e precisa: O LSM permite uma modelagem mais dinâmica do preço do ativo subjacente em comparação com o modelo binomial, que assume que o ativo só pode subir ou descer com uma probabilidade fixa em cada período.
- Simulação de Monte Carlo: O método LSM usa a simulação de Monte Carlo, que pode ser mais eficiente do que os métodos baseados em árvore (usados na precificação binomial).
- Melhor aproximação do preço considerando o possível exercício antecipado: O modelo LSM considera explicitamente a possibilidade de exercício antecipado, que é uma característica importante das opções americanas. Isso permite que o método LSM capture o valor total da opção, em vez de apenas seu valor intrínseco.

Este artigo está dividido da seguinte forma: Na seção II, definimos nosso problema, na seção III detalhamos a metodologia experimental, na seção IV mostramos os resultados e, por fim, na Seção V, apresentamos as conclusões e possibilidades para trabalhos futuros.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Opções

Derivativos são instrumentos financeiros (contratos) utilizados por investidores com diferentes objetivos, que podem ser desde a proteção de riscos relacionados a determinados

ativos ou a busca por alavancagem em cenários de alta ou de queda dos ativos. Tais produtos podem ter muitos formatos, sendo que o mais comum oferece ao investidor o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender o ativo subjacente em uma data futura por um preço predeterminado. Estes tipos de contrato são chamados de opção [7][8], e classificados da seguinte maneira:

- **Put:** direito de vender a um determinado preço (strike)
- **Call:** direito de comprar a um determinado preço (strike)

Além disso, existem diferentes opções, como opções de estilo europeu, em que o investidor não pode exercer a opção antecipadamente, apenas no vencimento e opções de estilo americano, em que o investidor pode exercer a qualquer momento o direito de compra ou venda [7].

O principal modelo matemático para calcular o valor de uma opção no decorrer do tempo é a chamada Equação de Black-Scholes [7], dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rS \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru = 0$$

onde:

- $S = S(t)$: é o preço do ativo subjacente
- $u = u(S, t)$: é o valor da opção
- r : é a taxa livre de risco
- t : tempo
- σ : volatilidade do ativo

Sendo K o strike da opção, pode-se afirmar que o valor recebido pelo investidor na data de vencimento será:

$$\begin{aligned} Call &= u(S, T) = \max(S - K, 0) \\ Put &= u(S, T) = \max(K - S, 0) \end{aligned}$$

Tomando as equações anteriores como condições de contorno para a equação de Black-Scholes e considerando opções europeias, que só podem ser exercidas no vencimento T , pode-se obter as seguintes fórmulas analíticas para o apreamento da opção [7]:

$$\begin{aligned} Call &= u(S, T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ Put &= u(S, T) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \end{aligned}$$

onde Φ é uma distribuição normal e d_1 e d_2 são dados por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

Ao considerarmos opções americanas o prêmio das opções de compra coincide com o preço de uma call do tipo europeia, pois pode-se demonstrar que nunca será vantajoso para o possuidor de uma opção de compra americana exercê-la antes do vencimento, assim a precificação deste ativo é a mesma utilizada para uma opção europeia [9]. Entretanto, não é possível desenvolver uma fórmula analítica direta para o apreamento das opções de venda (put), pois não existem garantias matemáticas que a melhor decisão para o investidor seja exercer a put apenas no vencimento,

o que tem levado ao desenvolvimento de métodos numéricos para o apreçamento deste tipo de opção, tais como o método de diferenças-finitas, árvores binomiais e métodos baseados em simulações de Monte Carlo [7][8].

O modelo binomial de Cox, Ross e Rubinststein apresenta uma versão simplificada a tempo discreto para o apreçamento de opções, incluindo as opções calls e puts [10].

Neste artigo resolvemos padronizar a precificação das opções americanas com a utilização do método binomial, que é muito utilizado nas situações reais de mercado. Com essa padronização de apreçamento o presente trabalho propõem-se a comparar a precificação binomial e o método de Monte Carlo com mínimos quadrados proposto por Longstaff e Schwartz (LSM) [7].

Da equação de Black-Scholes são derivadas as “gregas”, que representam a sensibilidade do preço da opção sobre alguns parâmetros.

- Δ : Representa a sensibilidade do preço da opção à mudanças no preço do ativo objeto.

$$\frac{\partial u}{\partial S}$$

- γ : Sensibilidade do delta da opção à mudanças no preço do ativo objeto.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

- *Vega*: Representa a sensibilidade do preço da opção à mudanças na volatilidade implícita.

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

- Θ : Mudança no preço da opção com a passagem do tempo, assumindo um movimento neutro ao risco no ativo objeto.

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

- ρ : Sensibilidade do preço da opção a mudanças na taxa livre de risco (juros).

$$\frac{\partial u}{\partial r}$$

2.2 Método de Monte Carlo com Mínimos Quadrados

Conforme mencionado anteriormente o problema com a precificação das opções americanas é que elas podem ser exercidas a qualquer momento até o vencimento. Considerando-se que o ativo subjacente pode ser modelado usando o movimento browniano geométrico [11], tem-se:

$$S(t) = S(0)e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}$$

onde:

- $S(0)$: é o preço inicial do ativo subjacente
- $W(t)$: é um movimento browniano

Usando as suposições feitas, pode-se dizer que o preço de uma opção americana no tempo 0 é dado pela seguinte equação, sendo $g(S(t))$ o payoff da opção no momento t com o ativo subjacente no preço $S(t)$, e o valor esperado calculado com relação à probabilidade neutra ao risco :

$$U(S, 0) = \sup_{t \in [0, T]} E[e^{-rt} g(S(t))]$$

Conclui-se assim que o valor da opção americana é o maior valor esperado do retorno descontado no momento de exercício. Isso se deve ao fato de supormos não arbitragem no mercado, ou seja, a opção deve custar tanto quanto o maior valor esperado dela. Resumindo, para obter o preço deste tipo de instrumento financeiro precisamos encontrar o momento de parada ótima t^* e então estimar o valor esperado com relação à probabilidade neutra ao risco [10][11]:

$$U(S, 0) = E[e^{-rt^*} g(S(t^*))]$$

O método LSM usa uma abordagem de programação dinâmica para encontrar o momento de parada ideal, e Monte Carlo para aproximar o valor esperado e assim tomar a decisão de parada [6]. A programação dinâmica é um método geral para resolver problemas de otimização, dividindo-o em partes menores (subproblemas) do fim para o início, e combinando suas soluções para resolver o problema inicial. Nesse caso, isso significa que dividimos o intervalo de tempo $[0, T]$ em um conjunto finito de pontos $(0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ com $t_n = T$, e para cada um deles deve-se decidir se é melhor exercer ou manter a opção, partindo do tempo T e trabalhando para trás até 0 [11].

Seja $C(S(t_i))$ o valor de manter a opção no tempo t_i (valor de continuidade), e seja o valor de exercício no momento t_i dado por $g(S(t_i))$. O valor de continuidade em um determinado momento t_i pode ser expresso como a esperança condicional do preço da opção:

$$C(S(t_i)) = E[e^{-r(t_i-t_0)} g(S(t_i)) | S(t_i)]$$

Reescrevendo $t_i - t_0$ como Δt e o preço da opção no tempo $g(S(t_i))$ como P , podemos reescrever a equação acima como:

$$C(S(t_i)) = E[e^{-r(\Delta t)} P | S(t_i)]$$

Para estimar essa esperança condicional, utilizada para a decisão de parada, o método LSM utiliza uma combinação linear de um conjunto de funções de base (Laguerre, Hermite, Legendre etc.) definidas no espaço L^2 [11]. Nesta implementação a função de base utilizada foi o polinômio de Laguerre, cujo os 3 primeiros termos são [6]:

$$L_0(X) = 1$$

$$L_1(X) = 1 - X$$

$$L_2(X) = \frac{1}{2}(2 - 4X + X^2)$$

$$L_3(X) = \frac{1}{6}(6 - 18X + 9X^2 - X^3)$$

Inicia-se o algoritmo com a simulação de M caminhos possíveis para o preço do ativo objeto S em um determinado período T , que será subdividido em n intervalos $t_i, i = 0, 1, \dots, n$. Após esta primeira etapa, aplica-se então

programação dinâmica e em cada subintervalo t_i verificam-se quais dos caminhos estão in the money, i.e, $g(S_j(t_i)) > 0$ com $S_j(t_i), j = 1, \dots, M$. Assim, define-se um subconjunto de caminhos no momento t_i em que as opções podem ser exercidas e definimos os prêmios recebidos, em caso de exercício, como $P_j = (S_j(t_i) - K)$ para uma call e $P_j = (K - S_j(t_i))$ para uma put.

O próximo passo será definir se os valores P_j calculados são pontos de parada ótima t^* . Para isso, deve-se calcular os valores de continuidade $C_j(S_j(t_i))$ que serão utilizados nesta tomada de decisão e compará-los aos prêmios de exercício antecipado das opções.

Seja a função de continuidade dada por:

$$C_j(S_j(t_i)) = \sum_{l=0}^k \hat{\beta}_l L_l(S_j(t_i))$$

onde, L_0, \dots, L_k são os k polinômios da função de base e $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$ são os coeficientes estimados da regressão linear feita entre os valores P_j descontados ($y_j = e^{-r\Delta t} P_j$) e os valores do ativo subjacente $x_j = S_j(t_i)$. Tem-se que

$$(\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k)^T = (L^T L)^{-1} L^T (y_1, \dots, y_j)^T$$

sendo, $L_{i,j} = L_j(x_i), i = 1, \dots, M$ e $j = 0, \dots, k$

Para cada P_j definiremos um payoff g_j , que será maior que zero caso seja ponto de parada ótima, usando a seguinte regra:

$$g_j(S_j(t_i)) = \begin{cases} P_j, & \text{se } C_j(S_j(t_i)) < P_j \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Para todos os caminhos que $g_j(S_j(t_i)) = 0$ ou que estão out of the money no momento t_i deve-se realizar novamente o procedimento de busca de parada ótima no subintervalo $t_i - 1$ de forma recorrente até $t = 0$ para que seja determinado o momento t_i^* de parada ótima para cada caminho.

Por fim, o valor da opção é dado pela média aritmética dos payoffs $g_j(S_j(t_i^*))$ descontados:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^M e^{-rt_i^*} g_m(S_m(t_i^*))$$

2.3 Implementação da Rede Neural (RN)

O mesmo algoritmo descrito anteriormente é feito para a implementação da rede neural, a diferença entre ambos está apenas na função de continuidade $C(S(t_i))$ em que o valor calculado não é mais uma interação polinomial, mas sim uma aproximação calculada com rede neural [5].

A interpolação polinomial, como proposta inicialmente para o método, pode ser eficaz para aproximação de modelos que tenham um baixo número de variáveis, entretanto pode rapidamente se tornar computacionalmente caro à medida que o tamanho e a complexidade do conjunto de dados aumentam. Por outro lado, as redes neurais são efetivamente melhores para modelar relações complexas com um custo computacional menor [12].

As redes neurais podem ser mais precisas e eficientes na modelagem de relacionamentos complexos e não lineares

nos dados. Eles também são capazes de generalizar bem para novos dados e podem lidar com valores ausentes e dados ruidosos com mais eficiência do que a interpolação polinomial. Além disso, podem ser treinadas em grandes conjuntos de dados usando gradiente descendente estocástico, que é um método escalável e eficiente para otimizar os parâmetros do modelo, fazendo com que a aproximação seja melhor[12].

A RN proposta possui 5 camadas, sendo:

- **1º Função Linear:** $y(x) = ax + b$
- **2º LeakyReLU:** $\begin{cases} y(X) = X, X \geq 0 \\ y(X) = aX, c.c \end{cases}$
- **3º Sigmoid:** $y(X) = \frac{1}{(1+e^{-X})}$
- **4º SoftPlus:** $y(X) = \ln(1 + e^X)$
- **5º Tanh:** $y(X) = \frac{2}{(1+e^{-2X})} - 1$

Essa combinação de funções de ativação não lineares usada nas camadas ocultas permite que o modelo aprenda funções mais complexas do que uma rede treinada usando funções lineares [13]. Os inputs da rede neural são os preços “in the money” no momento t_i , ou seja, $S_j(t_i), i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, M$ e o output da rede é tomado como sendo o valor de continuidade para a decisão de parada ótima.

A rede neural foi treinada pelo método de “gradient descent”[12][13] usando como métrica o erro quadrático médio do valor de continuidade calculado e os payoffs $g_j(S_j(t_i^*))$ descontados ($y(x) = e^{-rt_i^*} g_j(S_j(t_i^*))$).

3. METODOLOGIA

Como destacado anteriormente, o presente trabalho pretende fazer um estudo comparativo entre dois métodos de precificação de opções americanas, tanto calls quanto puts, para diferentes vencimentos (60, 90, 120 e 180 dias) em um range amplo de strikes (entre 70% e 130% do preço de referência).

O primeiro passo foi classificarmos os ativos em 3 classes distintas baseado em volatilidade:

- **Alta:** Volatilidade ≥ 50 %, podendo-se usar como exemplo a MGLU3
- **Média:** $50\% > \text{Volatilidade} \geq 30$ %, podendo-se usar como exemplo a PETR4
- **Baixa:** Volatilidade < 30 %, podendo-se usar como exemplo a ITSA4

Para cada classe de ativos realizou-se a simulação de 500 caminhos possíveis $M = 500$ para o ativo objeto (como descrito na secção 2.2). A quantidade i de subintervalos no tempo T em que foi feito o teste de continuidade é igual ao número de dias até o vencimento (60, 90, 120 ou 180). Em cada vencimento simulou-se 600 strikes distintos distribuídos entre 70% e 120% do preço at the money. Para cada um destes calculou-se o preço das opções utilizando-se 3 diferentes métodos de apreçamento: binomial (método padrão para opções americanas), LSM com aproximação polinomial e LSM com redes neurais. Por fim, comparamos o erro quadrático médio (EQM) destes com o método binomial. Importante frisar que o estudo foi feito para calls e puts.

Os preços de referência dos ativos corresponde ao preço de fechamento no dia 01/04/2023, consideramos a taxa de juros dado pela Curva DI como sendo 12,82% ao ano e não levou-se em consideração o pagamento de dividendos (dividend yield) e os custos operacionais relativo as operações. Os resultados obtidos serão mostrados na próxima seção.

4. RESULTADOS

4.1 Ativos de Alta Volatilidade

No primeiro grupo de ativo (alta volatilidade) percebe-se que EQM aumenta quanto mais longo é o vencimento da call, por exemplo, o EQM máximo para uma call de 60 dias é aproximadamente 2 e que vai para próximo de 6 quando analisamos opções para 180 dias e isso não ocorre nas puts. Ao analisarmos o comportamento com a variação de moneyness, para ambos os casos, percebe-se que quando mais out of the money é a opção maior o EQM, independentemente de qual método é utilizado. Observa-se que o algoritmo que utiliza redes neurais apresenta comportamento similar ao LSM, porém com erro quadrático médio maior que o estudo polinomial. Ao compararmos os tipos de opção, nota-se que o apreçamento das puts apresenta erro quadrático médio menor que o das calls. Os resultados estão mostrados nas figuras 1 e 2:

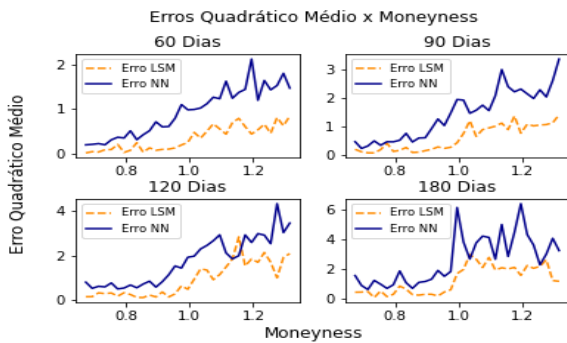


Figura 1. Erro Quadrático Médio - Call - Ativos Alta Volatilidade.

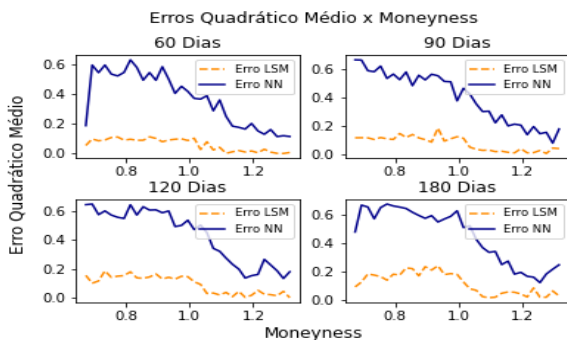


Figura 2. Erro Quadrático Médio - Put - Ativos Alta Volatilidade.

4.2 Ativos de Média Volatilidade

Observa-se, para ambas as opções, que o EQM é relativamente baixo para opções deep in the money e que passa a crescer quanto mais perto o strike está do preço de

referência (at the money) e quando atingimos uma região out of the money o EQM decresce novamente, e tal comportamento ocorre em todos os vencimentos simulados. Ao compararmos ambas as abordagens o algoritmo que utiliza redes neurais apresenta erro quadrático médio ligeiramente menor que a implementação polinomial no apreçamento de calls, entretanto possui EQM ligeiramente maior na precificação de puts. Novamente, ao compararmos os tipos de opção, nota-se que o apreçamento de opções de venda apresenta erro quadrático médio menor que o de opções de compra. Os resultados estão mostrados nas figuras 3 e 4:

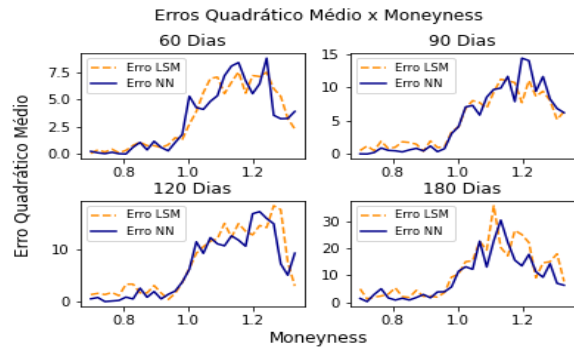


Figura 3. Erro Quadrático Médio - Call - Ativos Média Volatilidade.

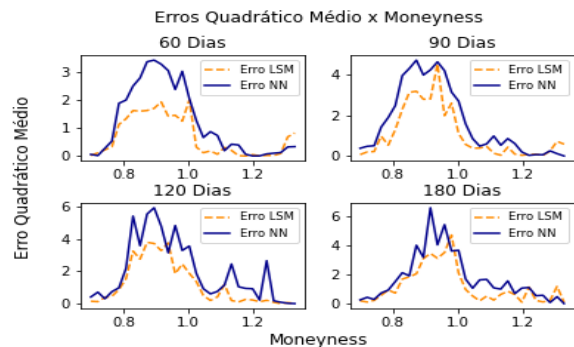


Figura 4. Erro Quadrático Médio - Put - Ativos Média Volatilidade.

4.3 Ativos de Baixa Volatilidade

Para os ativos de baixa volatilidade o método apresenta EQM menor nas regiões deep out of the money e deep in the money e é maior nas regiões próximas ao at the money, este padrão é observado em todos os vencimentos simulados. Novamente, nota-se que nas opções de compra o erro quadrático médio cresce quanto mais longo é o vencimento, entretanto nesta classe de ativos a diferença não é tão grande quando nas simulações anteriores.

Na comparação entre as abordagens, o algoritmo que utiliza redes neurais apresenta erro quadrático médio menor nas regiões deep out of the money e deep in the money. Ainda se observa o padrão de que a precificação de puts apresenta EQM menor que as calls. Importante frisar que para esta classe de ativos o erro quadrático médio foi o menor em todas as simulações realizadas.

Os resultados estão mostrados nas figuras 5 e 6.

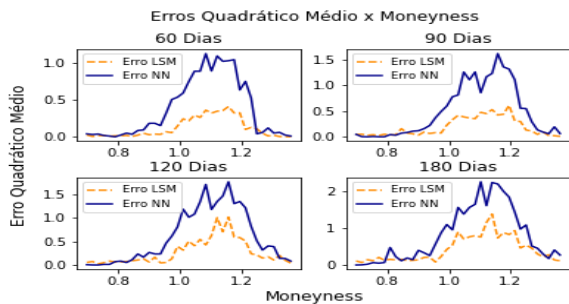


Figura 5. Erro Quadrático Médio - Call - Ativos Baixa Volatilidade.

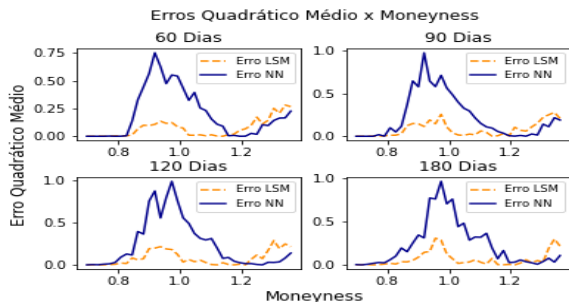


Figura 6. Erro Quadrático Médio - Put - Ativos Baixa Volatilidade.

5. CONCLUSÃO

No estudo realizado, fez-se uma análise comparativa entre métodos para apuração de opções americanas (calls e puts). Não esperamos definir categoricamente qual seria o preço “verdadeiro” destes instrumentos financeiros, pois muitas variáveis mercadológicas (como liquidez, riscos inerentes ao ativo subjacente e variáveis macroeconômicas) influenciam em tal avaliação para o preço de determinado produto. Buscou-se apenas observar como novos métodos propostos se comportam com relação a abordagem de apuração padrão. Desta análise pode-se concluir que as opções apuradas com a utilização de redes neurais, se comparada a abordagem polinomial, apresentam EQM similar para os ativos classificados com volatilidade média, ao considerarmos os ativos de alta volatilidade a precificação feita com redes neurais apresentam EQM maior e para os ativos de baixa volatilidade a abordagem de redes neurais apresenta EQM menores nas “caudas” (regiões deep in the money e deep out of the money). Notou-se também que o método LSM apresenta um erro quadrático médio menor ao precificar-se opções de venda. Duas frentes são possíveis para estudos posteriores, primeiramente considerando o problema de apuração de opções. Pode-se expandir a análise comparativa aqui feita, seja com outros métodos de apuração de opções como o modelo trinomial ou método de diferenças-finitas, ou também analisar comparativamente o preço de opções reais negociadas no mercado brasileiro com o preço previsto pelos modelos. No que diz respeito às melhorias no próprio algoritmo, os avanços futuros podem se concentrar em aprimorar as redes neurais, com o objetivo de reduzir o EQM e torná-las mais adequadas à dinâmica de volatilidade e risco presentes no mercado financeiro brasileiro. Isso permitiria obter um método de precificação que combina as vantagens

do algoritmo LSM com as características específicas do mercado financeiro nacional.

REFERÊNCIAS

- [1] Douglas S Cruz Neto et al. “A Bolsa de Valores e os Novos Investidores nos Tempos Atuais”. Em: *Gestão em Foco* 14 (2022), pp. 309–320.
- [2] Yufeng Han et al. *Technical Analysis in the Stock Market: A Review*. Papers 3850494. ssn.com, 2021. URL: <https://ssrn.com/abstract=3850494>.
- [3] S. Ahmed Wafi, Hassan Hassan e Adel Mabrouk. “Fundamental Analysis Models in Financial Markets – Review Study”. Em: *Procedia Economics and Finance* 30 (2015), pp. 939–947.
- [4] Humphrey B. Neill, ed. *Tape Reading and Market Tactics*. B.C. Forbes Publishing, 1931.
- [5] Calypso Herrera et al. *Optimal Stopping via Randomized Neural Networks*. Papers 2104.13669. arXiv.org, 2021. URL: <https://ideas.repec.org/p/arx/papers/2104.13669.html>.
- [6] A. Francis Longstaff e S. Eduardo Schwartz. “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach”. Em: *The Review of Financial Studies* 14 (2001), pp. 113–147.
- [7] Nassim Taleb, ed. *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. Wiley Series in Financial Engineering, 1996.
- [8] Cesar Lauro da Costa, ed. *Opções: Operando a Volatilidade*. BMF, 1998.
- [9] Jonas Bergström. “Pricing the American Option Using Ito’s Formula and Optimal Stopping Theory”. Tese de dout. Uppsala, Suécia: Uppsala Universitet, 2014.
- [10] C. John Cox, A. Stephen Ross e Mark Rubinstein. “Option Pricing: A Simplified Approach”. Em: *Journal of Financial Economics* 7 (1979), pp. 229–263.
- [11] William Gustafsson. “Evaluating the Longstaff-Schwartz Method for Pricing of American Options”. Tese de dout. Uppsala, Suécia: Uppsala Universitet, 2015.
- [12] Gareth James and Daniela Witten and Trevor Hastie and Robert Tibshirani, ed. *An Introduction to Statistical Learning with Application in R*. Springer, 2013.
- [13] Simon Haykin, ed. *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice Hall, 2008.