

Controle chaveado de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída ^{*}

Flávio A. Faria ^{*} Lyara C. C. Menezes ^{*} Dante J. S. Oncoy ^{**}
Rodrigo Cardim ^{**} Edvaldo Assunção ^{**} Marcelo C. M. Teixeira ^{**}

^{*} Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira (e-mails: {flavio.faria,lyara.caroliny}@unesp.br)

^{**} Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira (e-mails: {dante.solis-oncoy,rodrigo.cardim,edvaldo.assuncao,marcelo.minhoto}@unesp.br)

Abstract: Sufficient LMI based conditions for the robust control of uncertain linear systems via static output feedback are proposed. A chattering-free switched control is proposed to ensure stabilization with constraints on the decay rate. The design is developed considering a parameter dependent Lyapunov function. The efficiency of the proposed method is illustrated by a numerical example.

Resumo: Este trabalho propõe condições suficientes baseadas em LMIs para o projeto de controle robusto de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída. É proposto um controle chaveado, livre de chattering, para garantir a estabilização com restrições na taxa de decaimento. O projeto é desenvolvido considerando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. A eficiência do método proposto é ilustrada através de um exemplo numérico.

Keywords: Static output feedback; uncertain linear systems; linear matrix inequalities; matrix decomposition; parameter dependent Lyapunov function.

Palavras-chaves: Realimentação estática da saída; sistemas lineares incertos; desigualdades matriciais lineares; decomposição matricial; função de Lyapunov dependente de parâmetros.

1. INTRODUÇÃO

Existem problemas práticos em que não é possível incluir sensores para medir todos os estados do sistema, inviabilizando um projeto de controle usando realimentação de estados. Nesses casos, uma maneira de contornar a situação consiste em desenvolver um projeto de realimentação estática da saída (Ebihara et al., 2015).

O projeto de realimentação estática da saída (do inglês, static output feedback (SOF)) consiste em usar apenas os sinais medidos na saída para controlar o comportamento dinâmico do sistema. Esse tipo de controlador reduz custos no projeto e possui implementação prática simples. No entanto, a fase de projeto é bem complexa (Crusius and Trofino, 1999; Carniato et al., 2020; Dong and Yang, 2013; Elias et al., 2022a; Ebihara et al., 2015; Gritli and Belghith, 2018; Sadabadi and Peaucelle, 2016). Por padrão, as condições de estabilidade obtidas empregando o método direto de Lyapunov são desigualdades matriciais bilineares (do inglês, Bilinear Matrix inequalities (BMIs)) (Crusius and Trofino, 1999) e, até o presente momento, os algoritmos reportados na literatura para resolver BMIs são *np-hard*, o que dificulta a solução de BMIs em microcomputadores. Para contornar essa dificuldade foram propostas

na literatura diferentes abordagens para converter BMIs em desigualdades matriciais lineares (do inglês, Linear Matrix inequalities (LMIs)). LMIs podem ser facilmente programadas em microcomputadores usando os pacotes “YALMIP” (Löfberg, 2004) e “SDPT3” (Toh et al., 1999) do MATLAB.

O processo de conversão de BMIs em LMIs pode ser realizado de várias formas, por exemplo, combinando LMIs com igualdades matriciais lineares (do inglês, Linear Matrix equalities (LMEs)) (Crusius and Trofino, 1999), usando o Lema da Projeção recíproca (Apkarian et al., 2001), usando o Lema de Finsler (Dong and Yang, 2007), usando termos nulos para adicionar variáveis matriciais de folga (Dong and Yang, 2013) ou usando decomposição matricial (Rubió-Massegú et al., 2013). Cada método possui suas vantagens e desvantagens e, em geral, adicionam algum tipo de conservadorismo na resolução do problema. Esse é o ponto chave deste trabalho, o objetivo é propor condições suficientes baseadas em LMIs para o controle robusto de sistemas lineares incertos. O projeto inclui restrições na taxa de decaimento para reduzir o tempo de acomodação do sistema. Para reduzir o conservadorismo nas LMIs é proposto um projeto de controle chaveado. Resultados recentes da literatura mostram que projetos de controle chaveado podem gerar condições estabilizantes menos conservadores que projetos de controle robusto tradicionais (Elias et al., 2022b,a; Faria et al., 2022a,b;

^{*} Este trabalho obteve suporte financeiro da FAPESP (2022/11100-5), CNPq (303637/2021-8, 308581/2022-9, 312065/2020-5) e CAPES (Código de Financiamento 001).

Magossi et al., 2022). Seguindo a estratégia apresentada em (Faria et al., 2022a) é proposto um Algoritmo para gerar uma lei de chaveamento livre de chattering.

A eficiência do método proposto é ilustrada através de um exemplo numérico.

Notações: Ao longo do texto o símbolo \mathbb{K}_s é usado para descrever o conjunto de números naturais $\{1, 2, \dots, s\}$. O símbolo \star denota o elemento transposto em uma matriz simétrica. A transposta de uma matriz é denotada por \mathbf{A}' e $\text{He}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$. A desigualdade matricial $\mathbf{A} \prec 0$ ($\mathbf{A} \succ 0$) significa que \mathbf{A} é simétrica definida negativa (positiva) e \mathbf{I}_s representa uma matriz identidade de dimensão s . Em matrizes simétricas, $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ e $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ descrevem o menor e o maior autovalor da matriz respectivamente. O símbolo Λ_s denota o conjunto de vetores $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^s$ com componentes não negativas $\lambda_j \geq 0$ satisfazendo

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1.$$

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema linear incerto descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída do sistema, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ matrizes constantes conhecidas, r o número de vértices matriciais do sistema incerto e α_i constantes desconhecidas satisfazendo

$$\forall i \in \mathbb{K}_r, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1. \quad (2)$$

O projeto de controle chaveado consiste em encontrar condições suficientes para a estabilização do sistema (1) usando uma entrada da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_{\sigma(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t) \quad (3)$$

sendo $\mathbf{K}_{\sigma(\mathbf{y})} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ os ganhos estabilizantes do controlador, $\sigma(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n_y} \mapsto \mathbb{K}_s$ uma função constante por partes e s o número total de ganhos usados para o chaveamento. Aplicando a entrada de controle (3) em (1) obtém-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_{\sigma(\mathbf{y})} \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Como a matriz $\mathbf{K}_{\sigma(\mathbf{y})}$ é dinâmica, então o projeto consiste em encontrar matrizes constantes \mathbf{K}_j , $j \in \mathbb{K}_s$, e uma lei de chaveamento apropriada $\sigma(\mathbf{y})$ para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. O projeto de controle desenvolvido neste trabalho também inclui restrições na taxa de decaimento com o intuito de assegurar performance na saída do sistema.

Para o desenvolvimento das condições de controle usa-se o critério de estabilidade de Lyapunov, isto é, verifica-se a existência de uma função $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{0}) &= 0, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) > 0, \\ \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) &< -\beta \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)), \quad \forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

sendo β uma constante positiva pré-estabelecida (Boyd et al., 1994, pág. 66). A função $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$ permite estudar o comportamento dinâmico do sistema (1) sem conhecer a expressão analítica da solução. Por outro lado, não existe um método analítico para encontrar uma função satisfazendo as condições (5). O que se faz, em geral, é verificar se uma determinada função candidata satisfaz as condições de estabilidade. Este trabalho usa uma função candidata da forma:

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i \right)^{-1} \mathbf{x} \quad (6)$$

sendo \mathbf{P}_i , $i \in \mathbb{K}_r$, matrizes definidas positivas a serem encontradas. A derivada no tempo da função (6) é dada por

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i \right)^{-1} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}' \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i \right)^{-1} \mathbf{x}. \quad (7)$$

Para facilitar a notação, de agora em diante, o argumento das funções poderá ser omitido. Por exemplo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e $\sigma = \sigma(\mathbf{y})$.

Para ilustrar a eficiência do resultado principal alguns trabalhos da literatura foram adaptados para incluir a restrição de taxa de decaimento nas condições de controle.

Lema 1. Dado $\beta > 0$, se existirem matrizes $\mathbf{W} = \mathbf{W}' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ satisfazendo as condições

$$\mathbf{W} \succ \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{C}' \mathbf{N}' \mathbf{B}'_i + \mathbf{B}_i \mathbf{N} \mathbf{C} + 2\beta \mathbf{W} \prec \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{W} \quad (10)$$

então o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) \quad (11)$$

com ganho $\mathbf{K} = \mathbf{N} \mathbf{M}^{-1}$ é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

Prova: Usando uma função candidata da forma $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x}$, a prova é obtida diretamente da demonstração do Teorema 1 de (Crusius and Trofino, 1999) substituindo a condição $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$ por $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) < -\beta \mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$. □

Lema 2. Dados $\beta > 0$ e $\tau > 0$, se existirem matrizes $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ satisfazendo as condições (12) e (13), então o sistema (11), com ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Y} \mathbf{G}^{-1}$, é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

$$\mathbf{P}_i \succ \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} \prec \mathbf{0} \quad (13)$$

sendo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $i \leq j$

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{Y} \mathbf{C}) + 2\beta \mathbf{P}_j & \star \\ \mathbf{C} \mathbf{P}_j - \mathbf{G} \mathbf{C} + \tau \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_i & -\tau(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{bmatrix}$$

Prova: A prova é obtida diretamente da demonstração do Teorema 4 de (Dong and Yang, 2013) substituindo a condição $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$ por $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) < -\beta \mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$. □

Lema 3. Dado $\beta > 0$ e uma matriz $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$, se existirem matrizes $\mathbf{Y}_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}'_Q \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$ e $\mathbf{X}_R = \mathbf{X}'_R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ satisfazendo as condições (14) e (15), então o sistema (11), com ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R \mathbf{X}_R^{-1}$, é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\text{He}(\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}) + 2\beta \mathbf{X} \prec \mathbf{0} \quad (15)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{X}_Q \mathbf{Q}' + \mathbf{R} \mathbf{X}_R \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^\dagger + \mathbf{Q} \mathbf{L}$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$ uma matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de \mathbf{C} , isto é, $\mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{0}$, e \mathbf{C}^\dagger a pseudo inversa de Moore–Penrose de \mathbf{C} .

Prova: Usando uma função candidata da forma $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}$, a demonstração segue diretamente da decomposição matricial apresentada em Rubió-Massegú et al. (2013), aplicadas às LMIs do projeto de realimentação de estados.

□

Como pode-se observar no Lema 3, a decomposição matricial apresentada em Rubió-Massegú et al. (2013) permite usar LMIs do projeto de realimentação de estados para encontrar o ganho da realimentação estática da saída. O resultado explora informações estruturais da matriz \mathbf{C} para construir as variáveis matriciais usadas nas LMIs. Esse procedimento será usado como base para o desenvolvimento teórico do resultado principal deste trabalho.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Controle chaveado de sistemas é um tema bem explorado na literatura (Carniato et al., 2020; de Souza et al., 2014; Geromel and Colaneri, 2006; Valentino et al., 2019; Silva et al., 2021). Essa abordagem pode relaxar as condições de estabilização baseadas em LMI ou simplificar a estrutura da entrada de controle quando comparada com controladores dinâmicos do tipo PDC, não-PDC, ou gain scheduling (de Souza et al., 2014; Elias et al., 2022a,b; Faria et al., 2022b). No entanto, uma escolha inadequada para a lei de chaveamento pode causar efeitos indesejáveis na entrada de controle, tais como chattering. Uma lei de chaveamento apresenta chattering se ela troca infinitamente de valores em um intervalo finito de tempo (Azhmyakov and Miranda Villatoro, 2012). Esse efeito pode inviabilizar a implementação prática uma vez que a estrutura física pode não conseguir chavear na velocidade necessária para garantir a estabilização, além disso, o chaveamento constante e rápido causa desgaste físico no equipamento. Para evitar esse comportamento propõe-se o seguinte resultado:

Proposição 1. Sejam \mathbf{Z}_k , $k \in \mathbb{K}_s$, matrizes simétricas conhecidas. Para um dado $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_s$, se a LMI

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{Z}_k \prec \mathbf{0} \quad (16)$$

é satisfeita, então uma função $\sigma(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n_y} \mapsto \mathbb{K}_s$ que não apresenta chattering pode ser obtida a partir do algoritmo:

Algoritmo 1. Lei de Chaveamento

Entrada: $k_0 \in \mathbb{K}_s$;

Se $\mathbf{y}' \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y} < 0$ **então**

$$\sigma(\mathbf{y}) = k_0;$$

senão

$$k_0 = \min \left(\arg \min_{k \in \mathbb{K}_s} \mathbf{y}' \mathbf{Z}_k \mathbf{y} \right);$$

$$\sigma(\mathbf{y}) = k_0;$$

fim Se

Prova: Para um dado $k_0 \in \mathbb{K}_s$, em qualquer instante de tempo t^1 , se $\mathbf{y}'(t^1) \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t^1) < 0$, então o Algoritmo 1 mantém ativo o mesmo controle. Por outro lado, se

$$\mathbf{y}'(t^1) \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t^1) \geq 0 \quad (17)$$

então o Algoritmo 1 seleciona o menor índice \bar{k} tal que

$$\bar{k} = \arg \min_{k \in \mathbb{K}_s} \mathbf{y}' \mathbf{Z}_k \mathbf{y}, \quad (18)$$

atualiza a lei de chaveamento $\sigma(\mathbf{y}) = \bar{k}$ e o índice $k_0 = \bar{k}$. O que assegura o seguinte resultado

$$\mathbf{y}(t^1)' \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t^1) \leq \mathbf{y}(t^1)' \mathbf{Z}_k \mathbf{y}(t^1) \quad (19)$$

$\forall k \in \mathbb{K}_s \setminus \{k_0\}$. Multiplicando ambos os lados de (19) por λ_k e somando todos os termos, de (16) conclui-se que

$$\mathbf{y}(t^1)' \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t^1) < \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{y}(t^1)' \mathbf{Z}_k \mathbf{y}(t^1) < 0. \quad (20)$$

Se $\mathbf{y}(t)' \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t) < 0$, $\forall t > t^1$, então $\sigma(\mathbf{y})$ permanece ativa no mesmo índice k_0 . Por outro lado, se existir um instante $t^* > t^1$ no qual a função se torna positiva, então devido a continuidade da função em um índice fixo k_0 e da desigualdade (20), existe um instante $t^2 \in (t^1 \ t^*)$ tal que

$$\mathbf{y}(t^2)' \mathbf{Z}_{k_0} \mathbf{y}(t^2) = 0.$$

Assim, para todo $t \in [t^1 \ t^2)$, a lei de chaveamento $\sigma(\mathbf{y})$ permanece ativa no mesmo índice k_0 , evitando a troca instantânea de índices. Portanto, a lei de chaveamento obtida com o Algoritmo (1) não apresenta chattering.

□

Considerando a entrada de controle (3) e a Proposição 1, o próximo teorema apresenta condições suficientes para assegurar que o sistema (4) seja assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que um valor pré-especificado β .

Teorema 4. Dados $\beta > 0$, $\tau > 0$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$, $s \in \Lambda_s$. Se existirem matrizes simétricas $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{Z}_k^{11} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{Z}_k^{22} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e matrizes completas $\mathbf{Z}_k^{21} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{W}_R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{W}_Q \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$ e $\mathbf{Y}_{R_k} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ satisfazendo as LMIs (21)-(23), então os ganhos $\mathbf{K}_k = \mathbf{Y}_{R_k} \mathbf{W}_R^{-1}$ com a lei de chaveamento dada pelo Algoritmo 1 garantem que o sistema (4) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

$$\mathbf{P}_i \succ \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\Xi_{ijk} + \Xi_{jik} \prec \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{Z}_k \prec \mathbf{0} \quad (23)$$

sendo $i, j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_s$,

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \star \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\xi_{11} = \text{He}(\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_k) + 2\beta \mathbf{P}_j - \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{11} \mathbf{C}$$

$$\xi_{21} = \mathbf{P}_j - \mathbf{W} + \tau(\mathbf{B}_i \mathbf{Y}_k)' - \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{21} \mathbf{C}$$

$$\xi_{22} = -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') - \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{22} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k^{11} & \star \\ \mathbf{Z}_k^{21} & \mathbf{Z}_k^{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q} \mathbf{W}_Q \mathbf{Q}' + \mathbf{R} \mathbf{W}_R \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{Rk} \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^\dagger + \mathbf{Q} \mathbf{L}$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$ uma matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de \mathbf{C} e \mathbf{C}^\dagger a pseudo inversa de Moore–Penrose de \mathbf{C} .

Prova: Multiplicando (21) por α_i e somando todos os termos segue que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i \succ \mathbf{0}. \quad (24)$$

Multiplicando (24) à esquerda e à direita pelo vetor $\mathbf{x}(t)' (\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i)^{-1}$ e seu transposto, respectivamente, chega-se em (6). Logo, de (24) conclui-se que $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ e $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) > 0, \forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$.

Por outro lado, multiplicando (22) por $\alpha_i \alpha_j$ e somando todos os termos tem-se que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j \tilde{\Xi}_{ijk} \prec \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{11} \mathbf{C} & \star \\ \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{21} \mathbf{C} & \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{22} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$\forall k \in \mathbb{K}_s$ and

$$\tilde{\Xi}_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{11} & \star \\ \tilde{\xi}_{21} & -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\xi}_{11} = \text{He}(\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_k) + 2\beta \mathbf{P}_j$$

$$\tilde{\xi}_{21} = \mathbf{P}_j - \mathbf{W} + \tau(\mathbf{B}_i \mathbf{Y}_k)'.$$

Multiplicando (25) à esquerda e à direita pelo vetor $[\mathbf{x}(t)' \ \mathbf{x}(t)']$ e seu transposto, respectivamente, obtém-se a seguinte condição no lado direito da desigualdade

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{11} \mathbf{C} & \star \\ \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{21} \mathbf{C} & \mathbf{C}' \mathbf{Z}_k^{22} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k^{11} & \star \\ \mathbf{Z}_k^{21} & \mathbf{Z}_k^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Então, pela LMI (23) e Proposição 1 existe uma lei de chaveamento σ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}' \mathbf{Z}_\sigma \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} < \sum_{k=1}^s \lambda_k \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}' \mathbf{Z}_k \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} < 0. \quad (27)$$

Assim, pela desigualdade (25), tem-se que para todo instante t a lei de chaveamento σ garante que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j \tilde{\Xi}_{ij\sigma} \prec \mathbf{0}. \quad (28)$$

Multiplicando (28) à esquerda e à direita pelo vetor $[\mathbf{x}(t)' (\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j)^{-1} \ \mathbf{x}(t)' (\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_i)^{-1} \ \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{K}_\sigma]'$ e seu transposto, respectivamente, chega-se em

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}(t)' \left\{ \text{He} \left(\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_\sigma \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \right] \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{K}_\sigma \right) \left[\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right) - \mathbf{W} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tau \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{Y}_k' \mathbf{B}_i' \right] \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{K}_\sigma \right) \tau \mathbf{W} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{K}_\sigma' \mathbf{B}_i' \right) \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \right) \\ & \quad \left. + 2\beta \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \right\} \mathbf{x}(t) < 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Finalmente, considerando à transformação matricial $\mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{K}_\sigma \mathbf{W}$, de (4) e reorganizando os termos de (29), conclui-se que

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}(t)' \left\{ \text{He} \left(\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{K}_\sigma \right) \right) + 2\beta \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \right\} \mathbf{x}(t) = \\ & \quad \mathbf{x}' \left(\sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_i \mathbf{P}_j \right)^{-1} \mathbf{x} \\ & \quad + 2\beta \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{i=j}^r \alpha_j \mathbf{P}_j \right)^{-1} \mathbf{x}(t) < 0. \quad (30) \end{aligned}$$

Assim, quando as LMIs (21)-(23) são factíveis, existe uma função $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$ satisfazendo (5). Portanto, o sistema (4), com ganhos $\mathbf{K}_k = \mathbf{Y}_{R_k} \mathbf{W}_R^{-1}$ e lei de chaveamento dada pelo Algoritmo 1, é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

□

Observação 1. Em relação a outros métodos da literatura, tais como os Lemas 1 e 2, o Teorema 4 tem a vantagem de incorporar informações estruturais da matriz \mathbf{C} nas variáveis matriciais \mathbf{W} e \mathbf{Y}_k , reduzindo o conservadorismo nas LMIs. Com relação ao Lema 3, o Teorema 4 desacopla o ganho do controlador da função paramétrica (6) usando termos nulos para adicionar variáveis de folga nas LMIs.

Observação 2. A decomposição matricial usada na matriz \mathbf{W} depende da pseudo inversa \mathbf{C}^\dagger , o que limita o método proposto a problemas em que a matriz \mathbf{C} é fixa, enquanto os Lemas 1 e 2 também podem ser aplicados em problemas cujas matrizes \mathbf{C}_i estão sujeitas a incertezas paramétricas.

Para o caso particular $s = 1$, o Teorema 4 produz condições equivalentes ao projeto de controle robusto. Nesse caso, a desigualdade (23) tem pouco impacto na relaxação das LMIs e o resultado principal pode ser simplificado.

Corolário 5. Dados $\beta > 0$, $\tau > 0$ e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$. Se existirem matrizes $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{W}_R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{W}_Q \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$ e $\mathbf{Y}_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ satisfazendo (31) e (32), então o ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R \mathbf{W}_R^{-1}$ garante que o sistema (4) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que β .

$$\mathbf{P}_i \succ \mathbf{0} \quad (31)$$

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} \prec \mathbf{0} \quad (32)$$

sendo $i, j \in \mathbb{K}_r$

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \star \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\xi_{11} = \text{He}(\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}) + 2\beta \mathbf{P}_j$$

$$\xi_{21} = \mathbf{P}_j - \mathbf{W} + \tau(\mathbf{B}_i \mathbf{Y})'$$

$$\xi_{22} = -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}')$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q} \mathbf{W}_Q \mathbf{Q}' + \mathbf{R} \mathbf{W}_R \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R \mathbf{R}'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^\dagger + \mathbf{Q} \mathbf{L}$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$ uma matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de \mathbf{C} e \mathbf{C}^\dagger a pseudo inversa de Moore-Penrose de \mathbf{C} .

Prova: É obtida de maneira imediata da prova do Teorema 4.

Na próxima seção a eficiência do método proposto é ilustrada através da solução de um exemplo numérico.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere um sistema linear incerto (1) com matrizes

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & b^2 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & b^2 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A região de factibilidade dos Lemas 1, 2, 3 e Teorema 4 é obtida numericamente usando os pacotes “YALMIP” (Löfberg, 2004) e “SDPT3” (Toh et al., 1999) do MATLAB. Para a simulação é considerada uma região limitada em $a \in [150 \ 400]$ e $b \in [50 \ 450]$. Os parâmetros usados para resolver as LMIs foram: $\beta = 5$, $\tau \in [10^{-14} \ 10^{-6}]$, $s = 2$, $\lambda_1 \in [0.001 \ 0.999]$ e $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. O resultado dos testes é exibido na Figura 1.

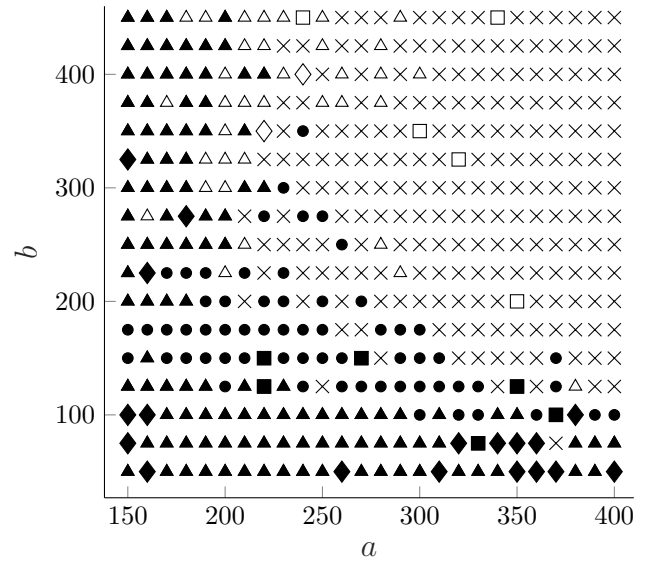


Figura 1. Região de factibilidade do Lema 1 (□, ■, ◇, ◆), Lema 2 (●, ■, ◆), Lema 3 (△, ▲, ◇, ◆) e Teorema 4 (□, ■, ◇, ◆, ●, △, ▲, ×).

A Figura 1 ilustra que a região de factibilidade do Teorema 4 sobrepõe as regiões dos Lemas 1, 2 e 3, indicando que o teorema pode ser menos conservador que resultados da literatura. Afim de avaliar a qualidade do controle chaveado (4) foram escolhidos alguns pontos (a, b) da região exibida na Figura 1 para simular o sistema. Em todos os pontos testados neste exemplo, ambos os ganhos \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , encontrados pelo Teorema 4, garantiram a estabilidade assintótica do sistema (4), dispensando a necessidade

de chaveamento. Basta manter sempre o mesmo controle ativo. Consequentemente, para os pontos testados, o Teorema 4 foi capaz de reduzir o conservadorismo nas LMIs sem aumentar a complexidade na implementação da ação de controle.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposto um projeto de controle robusto para sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída. As condições de projeto foram relaxadas usando o conceito de controle chaveado para incluir variáveis matriciais de folga nas LMIs que descrevem um projeto de controle com restrições na taxa de decaimento. O projeto de controle é baseado em uma lei de chaveamento livre de chattering que possui estrutura simples e de fácil implementação prática. Um exemplo numérico ilustrou que o método proposto pode ser menos conservador do que resultados da literatura. Trabalhos futuros consistem em estender o resultado para a atenuação de distúrbios em sistemas lineares incertos.

REFERÊNCIAS

- Apkarian, P., Tuan, H.D., and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12), 1941–1946. doi:10.1109/9.975496.
- Azhmyakov, V. and Miranda Villatoro, F.A. (2012). Approximability and variational description of the Zeno behavior in affine switched systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(9), 307–312. doi:10.3182/20120606-3-NL-3011.00097. 4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Carniato, L.A., Carniato, A.A., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., Mainardi Júnior, E.I., and Assunção, E. (2020). Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, 93(5), 1127–1146. doi:10.1080/00207179.2018.1495341.
- Crusius, C.A.R. and Trofino, A. (1999). Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5), 1053–1057.
- de Souza, W.A., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., and Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(6), 1720–1727.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2007). Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10), 1930–1936. doi:10.1109/TAC.2007.906227.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2013). Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, 49(6), 1821–1829.
- Ebihara, Y., Peaucelle, D., and Arzelier, D. (2015). *Static Output-Feedback Synthesis*, 165–198. Springer London, London. doi:10.1007/978-1-4471-6606-1_6.
- Elias, L.J., Faria, F.A., Araujo, R., Magossi, R.F.Q., and Oliveira, V.A. (2022a). Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.
- Elias, L.J., Faria, F.A., Magossi, R.F.Q., and Oliveira, V.A. (2022b). Switched control design for nonlinear systems using state feedback. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 33(3), 733–742.
- Faria, F.A., Barroso, M.A., Lazarini, A.Z.N., Assunção, E., Cardim, R., and Teixeira, M.C.M. (2022a). Robust switched state feedback design for linear uncertain systems subject to disturbances. In *2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 22–28.
- Faria, F.A., Elias, L.J., Magossi, R.F.Q., Carneiro, D.S., and Oliveira, V.A. (2022b). Less conservative state feedback design with switched controllers for TS fuzzy systems. In L.B. Palma, R. Neves-Silva, and L. Gomes (eds.), *CONTROLO 2022*, 251–261. Springer International Publishing, Cham.
- Geromel, J.C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5), 1915–1930.
- Gritli, H. and Belghith, S. (2018). New LMI conditions for static output feedback control of continuous-time linear systems with parametric uncertainties. In *2018 European Control Conference (ECC)*, 527–532. doi:10.23919/ECC.2018.8550597.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 284–289. Taipei, China.
- Magossi, R.F.Q., Elias, L.J., Faria, F.A., and Oliveira, V.A. (2022). State feedback design for TS fuzzy systems subject to persistent bounded disturbances. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control*, 5601–5607.
- Rubió-Massegú, J., Rossell, J., Karimi, H., and Palacios-Quinónero, F. (2013). Static output-feedback control under information structure constraints. *Automatica*, 49(1), 313–316.
- Sadabadi, M.S. and Peaucelle, D. (2016). From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. *Annual Reviews in Control*, 42, 11–26. doi:10.1016/j.arcontrol.2016.09.014.
- Silva, H.R.M., Cardim, R., Teixeira, M.C.M., Assunção, E., and Ramos, I.T.M. (2021). Switched control and tracking application in aeropendulum system using fuzzy models. In *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, 1–6. doi:10.1109/FUZZ45933.2021.9494543.
- Toh, K.C., Todd, M.J., and Tütüncü, R.H. (1999). SDPT3 – a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4), 545–581.
- Valentino, M.C., Faria, F.A., Oliveira, V.A., and Alberto, L.F.C. (2019). Ultimate boundedness sufficient conditions for nonlinear systems using TS fuzzy modelling. *Fuzzy Sets and Systems*, 361, 88–100.