

Controle de sistemas LPV sujeitos a comutação aplicado a modelos caóticos

João M. de S. Filho* Francisco L. de C. Costa**
Roberta R. T. Alves* Marcus V. S. Costa* Elenilson V. Fortes***
F. Everton U. Reis**** Victor P. B. Aguiar*

* PPGEE, Universidade Federal Rural do Semi-Arido, RN, Brasil
(e-mail: joao.filho42474@alunos.ufersa.edu.br,
robertarafaela2010@hotmail.com, marcus.costa@ufersa.edu.br,
victor@ufersa.edu.br).

** PPGEE, Universidade Federal do Ceará, CE, Brasil (e-mail:
luiscarvalho9000@gmail.com)

*** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, GO,
Brasil, (e-mail: elenilson.fortes@ifg.edu.br)

**** Depto. de Eng. Elétrica, Universidade Federal do Piauí, PI,
Brasil, (e-mail: evertonsx@ufpi.edu.br)

Abstract: This paper presents the extension of the Lyapunov-Metzler inequality for *linear parameter-varying* (LPV) switched systems. The proposed methodology is applied in the control of an approximate Van der Pol chaotic system via LPV synthesis. Numerical simulations are performed in the presented extension in order to analyze the behavior of the system both in open and closed loop. In the simulations carried out, the responses in time with varying parameters for the closed-loop stability and stabilization scenario were verified. From the above, it was possible to verify that the Van der Pol system obtained stability both in open loop and in closed loop for the proposed approach, which confirms the viability of this study in chaotic LPV switched models.

Resumo: Este artigo apresenta a extensão da desigualdade de Lyapunov-Metzler para sistemas chaveados *linear parameter-varying* (LPV). A metodologia proposta é aplicada no controle de um sistema caótico de Van der Pol aproximado via síntese LPV. Simulações numéricas são realizadas na generalização apresentada com intuito de analisar o comportamento do sistema tanto em malha aberta como em malha fechada. Nas simulações realizadas, foram verificadas as respostas no tempo com parâmetros variantes para o cenário de estabilidade e estabilização em malha fechada. Do exposto, foi possível verificar que o sistema de Van der Pol obteve uma estabilidade tanto em malha aberta, quanto em malha fechada para a abordagem proposta, o que credencia a viabilidade deste estudo em modelos caóticos LPV com comutação.

Keywords: Switched LPV systems control; linear matrix inequalities; systems approximation; Van der Pol equations.

Palavras-chaves: Switched LPV systems control; linear matrix inequalities; systems approximation; Van der Pol equations.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas não lineares do tipo caóticos são amplamente utilizados nas áreas de comunicação, projetos aeroespaciais e operações químicas. Como exemplo, é possível citar os trabalhos de Nowak (2002) e Zhai e Sands (2022). Nesses trabalhos, são abordados controle de sistemas não lineares nas nessas áreas acima mencionadas.

Na literatura, um exemplo de sistema não linear caótico é a equação de Van der Pol (Briat, 2015), sendo esta amplamente utilizada para estudar oscilações de formas de onda em circuitos eletrônicos (Cooper et al., 2017). A equação de Van der Pol tem sido fonte para diversos estudos, em especial na aproximação de sistemas não

lineares por meio da síntese de *linear parameter-varying* (LPV) (Bruzelius et al., 2004).

De acordo com Liu et al. (2020b), a não linearidade é uma das características que dificulta o controle de sistemas por métodos convencionais. Em razão disso, Abbas et al. (2021) comentam que um dos objetivos iniciais da síntese LPV foi o controle de sistemas não lineares a partir da extensão de sistemas LPV, para que fosse aplicado em abordagens de controle ótimo e robusto.

Paralelamente ao crescimento da síntese LPV e ao estudo de sistemas caóticos, tem-se o estudo de sistemas sujeitos a comutação ou chaveados. Esse crescimento pode ser explicado pelo fato de que tanto na engenharia, como na natureza, vários sistemas podem ser representados como

sistemas chaveados, devido as características de salto de valores e mudanças de fatores ambientais (Zhao e Hill, 2008; Liu et al., 2020a).

A partir disso, pode-se definir um sistema chaveado como um conjunto de subsistemas no domínio do tempo contínuo ou discreto, onde uma lei de controle comanda o chaveamento entre esses subsistemas (Sun e Ge, 2005). Na estabilização desses sistemas, é válido citar o artigo de Deaecto e Geromel (2008), onde foi apresentado uma metodologia para controlar sistemas chaveados por meio da desigualdade de Lyapunov-Metzler aplicada em sistemas em malha aberta e realimentados. Sobre metodologias de controle, alguns dos primeiros avanços podem ser verificados nos trabalhos de Liberzon e Morse (1999) e Daafouz et al. (2002), onde o controle de subsistemas são realizados por meio da definição de uma regra de comutação e aplicação de *linear matrix inequality* (LMI).

Desde então, com a diversificação e utilização de LMIs no controle de subsistemas, é possível verificar a existência, na literatura, de diversos trabalhos que abordam tal temática (Rego e Costa, 2023). Neste trabalhos, vários problemas de controle são expressos através de LMIs, sendo resolvidos com base em algoritmos de otimização convexa por meio de *softwares* de programação resolvedores ou *solvers*. Por outro lado, Bruzelius et al. (2004) afirma que os métodos de LMIs utilizados em conjunto com a síntese LPV representam uma forma sistemática de obter ganhos de realimentação de controladores por meio de ferramentas computacionais e processos de otimização. Nesse sentido, publicações abordando o controle de sistemas LPV sujeitos a comutação tem ganhado destaque. Nesse caso, é possível citar os trabalhos de Lu e Wu (2004), Wirth (2005), de Souza e Trofino (2006) e Hanifzadegan e Nagamune (2014). Nesses trabalhos, são realizadas uma abordagem semelhante, onde o sistema adotado nos exemplos numéricos são lineares e o parâmetro variante corresponde a uma faixa de valores ou a uma função no domínio do tempo.

Por conseguinte e, de acordo com os trabalhos mencionados anteriormente, nesse estudo propõem-se uma abordagem teórica-computacional capaz de estabilizar sistemas LPV caóticos sujeitos a comutação usando LMIs, cujas as principais contribuições podem ser destacadas a seguir:

- 1) Extensão das metodologias de controle referente a desigualdade de Lyapunov-Metzler abordados em Deaecto e Geromel (2008) para sistemas LPV;
- 2) Abordagem do sistema de Van der Pol mostrado em Bruzelius et al. (2004) como um conjunto de sistemas LPV chaveados;
- 3) Aplicação das metodologias de controle descritas no 1) no sistema obtido no item 2) considerando a estabilização LMI sujeita a comutação tanto em malha aberta como em malha fechada.

Do exposto, este estudo segue organizado na seguinte maneira: Na Seção 2, são apresentas uma visão geral sobre o sistema de Van-der- Pol, as equações não lineares e as equações aproximadas do sistema via síntese LPV. Na Seção 3, é apresentado uma generalização das metodologias abordadas em Deaecto e Geromel (2008) para sistemas LPV em malha aberta. Na seção 4, será apresentada uma generalização para sistemas LPV a partir do trabalho de Deaecto e Geromel (2008) para malha fechada. Na Seção 5,

são apresentados os resultados obtidos para as simulações de estabilidade em malha aberta e malha fechada, bem como uma discussão dos testes realizados. Por fim, na Seção 6, é exposto algumas conclusões obtidas a partir deste trabalho.

2. EQUAÇÕES DE VAN DER POL

O oscilador de Van der Pol descreve o comportamento oscilatório de uma classe de sistemas não lineares que pode ser representado fisicamente por circuitos com semicondutores. Uma aplicação desse circuito é na transmissão e recepção de sinais (Cooper et al., 2017). Dito isso, em (1) e (2), é descrito um sistema de Van der Pol, sendo este um caso especial da equação de Liénard.

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - 0.3 [1 - x_1(t)^2] x_2(t) \quad (2)$$

O sistema descrito nas eqs. (1) e (2) caracteriza-se por apresentar ciclo limite e campo vetorial reverso, o que faz com que todas as trajetórias que começam fora do ciclo limite sejam divergentes, enquanto as trajetórias que começam dentro desse ciclo tendem para a origem (Bruzelius et al., 2004).

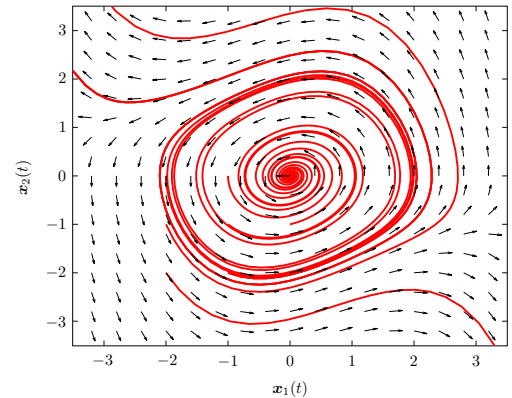


Figura 1. Região de atração no plano 2D.

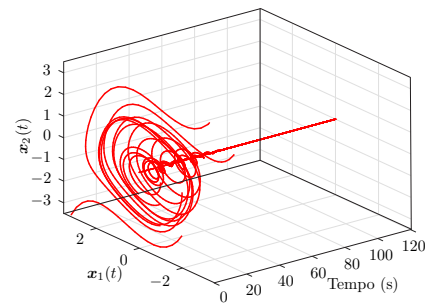


Figura 2. Região de atração no plano 3D.

Nas Figuras 1 e 2, é possível observar, respectivamente, que tanto no plano de fase 2D quanto 3D, há curvas de operação que tendem para a origem, sendo assim, estáveis, enquanto que outras curvas tendem para o infinito, portanto, instáveis.

De acordo com Bruzelius et al. (2004), um sistema não linear pode ser representado por diversas aproximações, a depender do método adotado para realizar a aproximação

e da região adotada para representar o sistema não linear. Nesse sentido, em Bruzelius et al. (2004) foram apresentadas duas abordagens para aproximar sistemas por meio da síntese LPV e LMIs. Essas abordagens foram nomeadas como método do desvio e método da sensibilidade.

Em Bruzelius et al. (2004), foi utilizada a equação de Van der Pol, sendo esta aproximada utilizando o método da sensibilidade. Essa linearização é expressa em (3).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 0,24\rho_1(t)\rho_2(t) & -0,3 + 0,06\rho_1(t)^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

Em (3), $\rho_1(t) = \mathbf{x}_1(t)$ e $\rho_2(t) = \mathbf{x}_2(t)$. Esse sistema é assintoticamente estável para $|\rho_1(t)| \leq 1,253$ e $|\rho_1(t)\rho_2(t)| \leq 0,85$. Dessa forma, um sistema não linear pode ser representado por um modelo simplificado, sendo possível, desta forma, aplicar técnicas de controles lineares (Asarin et al., 2003; Novara, 2011).

3. ESTABILIDADE DE SISTEMA LPV CHAVEADO

Considere o sistema LPV descrito por (4) e (5).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma(\rho)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_\sigma(\rho)\mathbf{w}(t) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{C}_\sigma\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

Em (4) e (5), $t \geq 0$, $\rho = \rho(t) \in \mathbb{R}^v$ é LPV, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado disponível para realimentação, $\sigma(t) \in \mathbb{K}$ é a regra de comutação, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ é a perturbação externa, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada e $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a condição inicial. Assim, de acordo com Deaecto e Geromel (2008), para cada instante de tempo t a regra de comutação $\sigma(t)$ seleciona uma matriz $(\mathbf{A}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{C}_i)$.

As condições de estabilidade global são obtidas por meio da função de Lyapunov disponível em (6).

$$v(\mathbf{x}) = \min_{i \in \mathbb{K}} \mathbf{x}' \mathbf{P}_i \mathbf{x} = \min_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}' \mathbf{P}_i \mathbf{x} \right) \quad (6)$$

Em (6), P_i são as matrizes de estabilidade dos N subsistemas disponíveis para chaveamento e $\lambda \in R^N$ são valores escalares contidos no conjunto convexo Λ definido em (7).

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (7)$$

É possível notar que (6) não é diferenciável em todos os pontos em que a minimização não é única. Nesse aspecto, Deaecto e Geromel (2008) consideram o conjunto de índices $I(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbb{K} : v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P}_i \mathbf{x}\} \subset \mathbb{K}$ e nas situações que a minimização não é única, é mencionado que o conjunto $I(\mathbf{x})$ há mais de um elemento.

Nesse sentido, Geromel e Colaneri (2006) consideram uma classe de submatrizes denominadas matrizes de Metzler (\mathcal{M}) definidas em (8).

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \pi_{ji} \geq 0, & i \neq j \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ji}, & \forall i, j \end{cases} \quad (8)$$

Em (8), todos os elementos da sua diagonal principal da classe de submatrizes são não-positivos, isto é, $\pi_{ii} \leq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Considerando essa subclasse de matrizes, Geromel e Colaneri (2006) formularam uma desigualdade matricial e uma regra de comutação para a estabilidade que, nesse artigo, será utilizada no sistema (4) e (5).

Nesse contexto, a desigualdade matricial de Lyapunov-Metzler definida por Geromel e Colaneri (2006) será generalizada considerando que as matrizes de estado $\mathbf{A}_{\sigma(t)}$ e $\mathbf{G}_{\sigma(t)}$ dependem linearmente do parâmetro ρ definido no domínio do tempo, como expresso no Teorema 1.

Teorema 1. Se existir um conjunto de matrizes simétricas semi-definidas positivas $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N\}$, uma matriz $\prod \in \mathcal{M}$ e um LPV no tempo ρ definido em $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler em (9)

$$\mathbf{A}'_i(\rho)\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_i(\rho) + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}\mathbf{P}_j + \mathbf{C}'_i\mathbf{C}_i < 0, i \in \mathbb{K}, \quad (9)$$

então a regra de comutação (10)

$$\sigma(\mathbf{x}(t)) = \arg \left(\min_{i \in \mathbb{K}} \mathbf{x}' \mathbf{P}_i \mathbf{x} \right) \quad (10)$$

leva o sistema (4) e (5) a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Além disso, a partir desse teorema, a desigualdade (11)

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(\mathbf{G}'_{\sigma(t)} \mathbf{P}_i \mathbf{G}_{\sigma(t)}) \quad (11)$$

é verdadeira.

Prova. A partir de Geromel e Colaneri (2006), é possível provar que a desigualdade (9) pode ser estendida para sistemas LPV. Para isso, é necessário calcular a derivada de Dini, uma vez que (6) não é diferenciável $\forall x$ e, portanto, é possível obter (12) – (14). Assim,

$$D^+v(\mathbf{x}(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(\mathbf{x}(t+h)) - v(\mathbf{x}(t))}{h} \quad (12)$$

$$D^+v(\mathbf{x}(t)) = \min_{l \in I(\mathbf{x}(t))} \mathbf{x}(t)' [\mathbf{A}_l(\rho) \mathbf{P}_l + \mathbf{P}_l \mathbf{A}_l(\rho)] \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

$$\leq \mathbf{x}(t)' (\mathbf{A}'_i(\rho) \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i(\rho)) \mathbf{x}(t) \quad (14)$$

Sabendo que $\mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_j \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) = v(\mathbf{x})$ e que $\pi_{ji} \leq 0$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$, a partir de (9) é possível obter (15) – (17)

$$D^+v(\mathbf{x}(t)) < \mathbf{x}(t)' \left(- \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathbf{P}_j - \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i \right) \mathbf{x}(t) \quad (15)$$

$$< - \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \right) \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)' \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \quad (16)$$

$$\langle -\mathbf{x}(t)' \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \rangle < 0 \quad (17)$$

■

Logo, por meio de (17) prova-se que a origem do sistema (4) e (5) é globalmente assintoticamente estável. Contudo, é notável que (9) é caracterizada por uma natureza não convexa, pois apresenta um produto de variáveis em sua formulação ($\pi_{ji} \mathbf{P}_i$), o que impede de ser utilizado *solvers* para obtenção da matriz de estabilidade \mathbf{P}_i .

Para solucionar essa problemática, Geromel e Colaneri (2006) sugerem uma abordagem mais conservadora, que consiste na utilização de uma subclasse das matrizes de Metzler, onde os elementos da diagonal principal são iguais.

Dito isto, Geromel e Colaneri (2006) formularam o Corolário 1, que será estendido considerando um parâmetro ρ variante no tempo nesse estudo.

Corolário 1. Suponha que o sistema (4) e (5) dependa de um LPV do tempo $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Suponha ainda que há um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N\}$ e um escalar positivo γ que pode ser obtido por uma busca unidimensional ou atribuído pelo projetista satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler em (18)

$$\mathbf{A}'_i(\rho) \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i(\rho) + \gamma(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) + \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i < 0, i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad (18)$$

então a regra de comutação (19)

$$\sigma(\mathbf{x}(t)) = \arg \left(\min_{i \in \mathbb{K}} \mathbf{x}' \mathbf{P}_i \mathbf{x} \right) \quad (19)$$

leva o sistema (4) e (5) a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova. De acordo com Deaecto e Geromel (2008), podem ser considerados subclasses de matrizes de Metzler, cujos elementos da diagonal principal são iguais $\forall i \in \mathbb{K}$. Desta forma, suponha que seja possível obter (20).

$$\gamma^{-1} \sum_{i=1}^N \pi_{ji} = 1 \quad (20)$$

Como $\pi_{ji} \geq 0 \forall i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, é possível multiplicar (18) por π_{ji} , e ao realizar a soma de todos os elementos $i \neq j$ e, em seguida, multiplicar o resultado obtido por γ^{-1} é possível determinar (21).

$$\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i < - \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) < - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathbf{P}_j \quad (21)$$

Assim, segue do Teorema 1 a desigualdade (18).

■

4. CONTROLE REALIMENTADO DE SISTEMAS LPV CHAVEADOS

Considere o sistema LPV chaveado como em (22) e (23).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\sigma(\rho) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_\sigma(\rho) \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_\sigma(\rho) \mathbf{w}(t) \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{C}_\sigma \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{u}(t) \quad (23)$$

Em (22) e (23), $\rho = \rho(t) \in \mathbb{R}^v$ é LPV, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ é o controle, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada externa impulsiva e $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada. Assim como no caso em malha aberta, a regra de comutação $\sigma(t) = i \in \mathbb{K}$ seleciona um subsistema definido por $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i)$. Dito isso, considere um controlador como definido em (24).

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_\sigma \mathbf{x}(t) \quad (24)$$

O sistema apresentado em (22) e (23) pode ser representado em malha fechada pelo sistema (25) e (26).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{cl}(\rho) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_\sigma(\rho) \mathbf{w}(t) \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{C}_{cl} \mathbf{x}(t) \quad (26)$$

Em (25) e (26), $\mathbf{A}_{cl}(\rho)$ e \mathbf{C}_{cl} são definidos, respectivamente, como em (27) e (28)

$$\mathbf{A}_{cl}(\rho) = \mathbf{A}_\sigma(\rho) + \mathbf{B}_\sigma(\rho) \mathbf{K}_\sigma \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_{cl} = \mathbf{C}_\sigma + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{K}_\sigma \quad (28)$$

Dito isto, Deaecto e Geromel (2008) retratam que para controlar um sistema como definido em (25) e (26), determina-se uma regra de comutação $\sigma(\mathbf{x}(t)) = i \in \mathbb{K}$ que seleciona, a cada instante de tempo $t \geq 0$ uma matriz de ganho \mathbf{K}_i do conjunto $\mathcal{K} = \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_N\}$, onde N é a quantidade de subsistemas.

Seguindo esta linha de raciocínio, para controlar o sistema definido em (26) e (26), é proposto neste artigo a aplicação do procedimento de otimização apresentados em Deaecto e Geromel (2008). Assim, considere um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N\}$, um conjunto de matrizes $\{\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_N\}$ e um escalar positivo γ que satisfazem as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler para sistemas com parâmetros variantes conforme (29) – (31).

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}\{\mathbf{W}_i\} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i - \gamma \mathbf{X}_i (\mathbf{C}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{L}_i)' & \gamma \mathbf{X}_i \\ * & -\mathbf{I} \\ * & * & -\gamma \mathbf{X}_j \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

$$\forall i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{G}_{\sigma(0)} \\ * & \mathbf{X}_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathcal{K} \quad (31)$$

Em (29) – (31), $\mathcal{L}_i = (\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{L}_i) + (\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i)'$. Então a regra de comutação (10) com $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i^{-1}$ e os ganhos de realimentação $\mathbf{K}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{X}_i^{-1}$ fazem com que o sistema (25) e (26) seja globalmente assintoticamente estável e a desigualdade (29) seja verdadeira.

5. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Nesta Seção é apresentada os resultados do controle em malha aberta e em malha fechada do sistema de Van der Pol considerando uma abordagem de controle chaveado. Nesse contexto, será definido um conjunto de subsistemas onde o conjunto de matrizes \mathbf{A}_i que dependem de um parâmetro ρ que varia ao longo do tempo dentro de um intervalo limitado, ρ_{\min} e ρ_{\max} .

5.1 Resposta do sistema em malha aberta

Para aplicar a metodologia de estabilidade descrita na Seção 3 ao sistema (3), primeiramente, foi considerado o chaveamento de ρ_1 entre os valores $-0,6265$ e $0,6265$, onde são obtidos dois subsistemas ($N = 2$). Esses valores foram escolhidos de forma a satisfazer as condições de estabilidade mencionadas na Seção 2.

Dessa forma, ρ_2 foi declarado como o parâmetro variante no tempo, que por simplicidade será denominado apenas de ρ . Dito isso, uma nova faixa de valores foi definida como sendo $\rho_{\min} = -0,6784$ e $\rho_{\max} = 0,6784$, sendo esta determinada de acordo com a região de estabilidade apresentada na Seção 2.

Desta forma, foram definidas as matrizes \mathbf{A}_1 , \mathbf{C}_1 e \mathbf{G}_1 (Subsistema 1) e \mathbf{A}_2 , \mathbf{C}_2 e \mathbf{G}_2 (Subsistema 2) do sistema de equações definidas em (4) e (5) e prontamente apresentadas em (32) – (34).

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - 0,15036\rho(t) & -0,2764 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 0,15036\rho(t) & -0,2764 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Com os subsistemas definidos em (32) – (34), é realizado o processo de otimização a partir da desigualdade (11) e, em seguida, é definida a função objetivo (35).

$$\max_{i \in \mathbb{K}} \sup_{\mathbf{P}_i > 0} \text{tr}(\mathbf{G}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i) \quad (35)$$

Além disso, por inspeção, para o projeto, foi definido $\gamma = 100$ e $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]'$ como condição inicial. Além disso, foi considerada uma perturbação impulsiva do tipo $\mathbf{w}(t) = \mathbf{e}_1 \delta(t)$, onde \mathbf{e}_1 é a primeira coluna da matriz identidade $m \times m$, sendo m a quantidade de colunas do vetor $\mathbf{x}(t)$. Com isso, são obtidas as matrizes \mathbf{P}_i , $i = \{1, 2\}$ prontamente apresentadas em (36) e (37), cujo o valor de 10,0508 foi obtido para o limitante superior por meio da desigualdade (11).

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 5,9302 & -0,8246 \\ -0,8246 & 5,7699 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 5,9202 & -0,8245 \\ -0,8245 & 5,7799 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Na Fig. 3, é apresentado a variação randômica do parâmetro $\rho(t)$ dentro da faixa estabelecida (Fig. 3 (a)) e a

seqüência de chaveamento (Fig. 3 (b)) obtida para a regra adotada (ver eq. (19)).

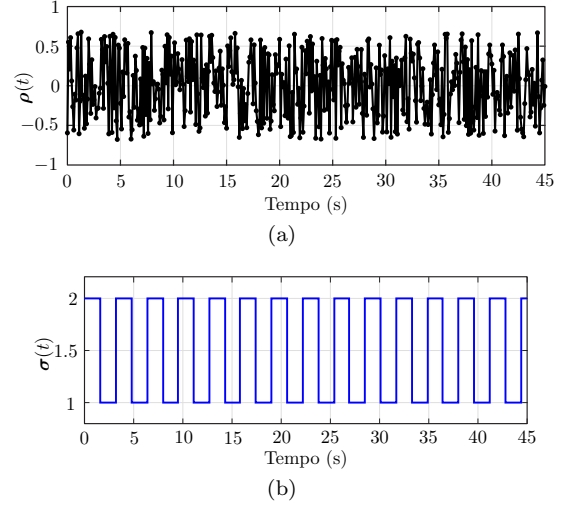


Figura 3. (a) Variação do parâmetro LPV e (b) chaveamento do sistema em malha aberta.

Ao analisar Fig. 3, é possível notar que a regra de comutação está atuando adequadamente mesmo com a variação do LPV, uma vez que a a regra de comutação $\sigma(t)$ está comutando entre os valores 1 e 2 sem dificuldades.

Na Fig. 4 são apresentados a evolução das funções objetivos, onde $\sigma_1(t)$ (Fig. 4 (a)), $\sigma_2(t)$ (Fig. 4 (b)) e $\min(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ (Fig. 4 (c)) são, respectivamente, a aplicação da regra de comutação (19) ao Subsistema 1, Subsistema 2 e o sistema de eqs. (4) e (5).

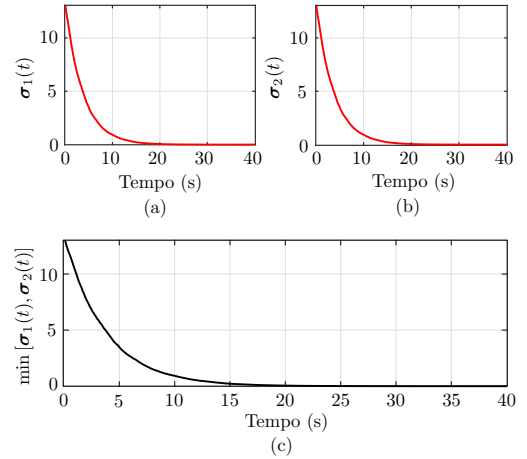


Figura 4. Evolução da variação das funções objetivo do sistema em malha aberta.

Ao analisar a Fig. 4, é possível verificar que todos os gráficos levam aproximadamente 15 segundos para que seja alcançada a convergência. Isso evidencia que cada regra de comutação $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$ estão trabalhando, respectivamente, para estabilizar os subsistemas (1 e 2), enquanto que a função $\min[\sigma_1(t), \sigma_2(t)]$ atua para estabilizar o sistema como um todo, eqs. (4) e (5).

Na Fig. 5 são apresentados as respostas no domínio do tempo dos estados $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$.

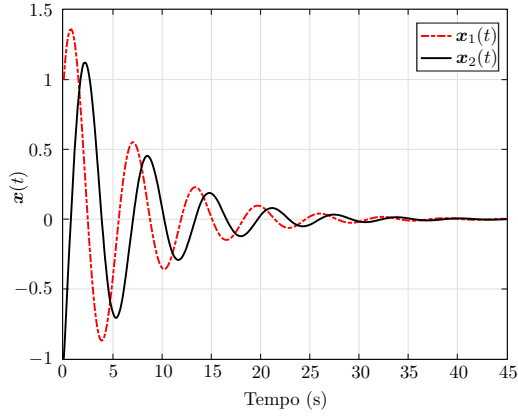


Figura 5. Resposta no tempo para o sistema em malha aberta.

Na Fig. 5, é possível observar que os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ estabilizam a partir de 30 segundos. Dessa forma, é possível afirmar que o Corolário 1, adaptado de Deaecto e Geromel (2008), estendido para sistemas LPV chaveados, é bem sucedido para o sistema proposto, uma vez que alcançou a estabilidade.

5.2 Resposta do sistema em malha fechada

Para o controle do sistema em malha fechada, é considerado um chaveamento entre dois subsistemas ($N = 2$), eqs. (38) – (41), análogo ao caso em malha aberta (ver Subseção 5.1). Assim, o subsistema A_1 , B_1 , C_1 e D_1 é denominado Subsistema 1, enquanto que A_2 , B_2 , C_2 e D_2 é denominado de Subsistema 2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - 0,15036\rho(t) & -0,2764 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 0,15036\rho(t) & -0,2764 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Em (38) – (41), $\rho(t)$ varia de acordo com a faixa de valores determinados na Subseção 5.1.

Para solução das LMIs (30) e (31), com função objetivo (29), é definido, por inspeção, $\gamma = 1 \times 10^{-3}$, $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]'$ (condição inicial) e uma perturbação impulsiva do tipo $\mathbf{w}(t) = \mathbf{e}_1 \delta(t)$, onde \mathbf{e}_1 é a primeira coluna da matriz identidade $m \times m$, sendo m a quantidade de colunas do vetor $\mathbf{x}(t)$. Dessa forma, após a aplicação do método de otimização descrito na Seção 4, foi possível obter as matrizes P_i , $i = \{1, 2\}$ prontamente apresentadas em (42) e (43).

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,5951 & -0,7782 \\ -0,7782 & 0,9521 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,8944 & -0,1921 \\ -0,1921 & 1,5813 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Além das matrizes P_i , o procedimento de otimização calculou os valores para os ganhos de realimentação K_i , exibidos em (44) e (45).

$$K_1 = [0,4236 \ -1,1468] \quad (44)$$

$$K_2 = [-0,8944 \ -0,8079] \quad (45)$$

Na Fig. 6, é apresentado a variação do parâmetro $\rho(t)$ (Fig. 6 (a)) adotado como LPV e o resultado do chaveamento para a regra de comutação (Fig. 6 (b)) utilizada nesse estudo, eq. (19).

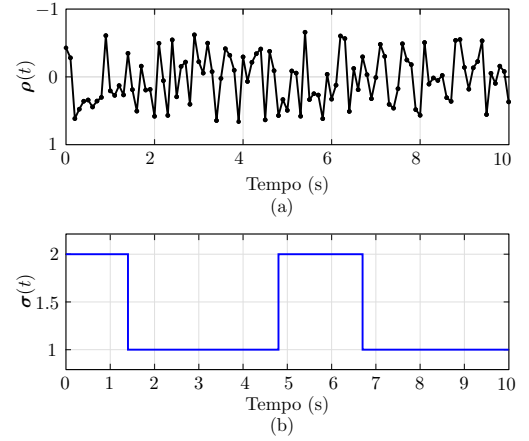


Figura 6. Variação do parâmetro LPV e chaveamento do sistema em malha fechada.

Ao analisar a Fig. 6, verifica-se que os resultados apresentados são compatíveis com o esperado, pois o parâmetro $\rho(t)$ variou dentro da faixa estabelecida e a regra de comutação $\sigma(t)$ alternou entre 1 e 2, o que comprova o perfeito funcionamento da regra de comutação com a variação do LPV.

Na Fig. 7 são apresentados a evolução das funções objetivos, sendo $\sigma_1(t)$ representada na Fig. 7 (a), $\sigma_2(t)$ em Fig. 7 (b) e $\min[\sigma_1(t), \sigma_2(t)]$ na Fig. 7 (c). Estas, respectivamente, representam a atuação da regra de comutação (19) no Subsistema 1, Subsistema 2 e o sistema de eqs. (22) e (23) em malha fechada.

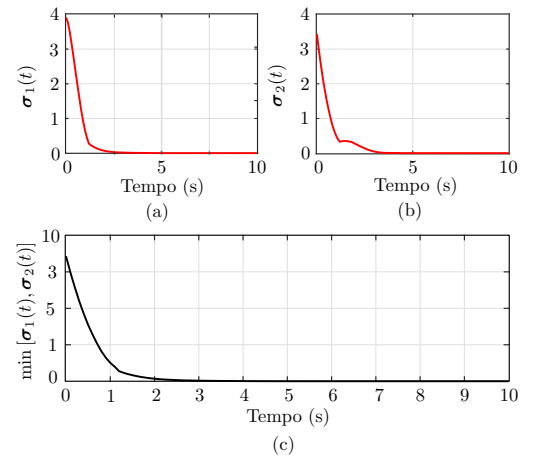


Figura 7. Evolução da variação das funções objetivos do sistema em malha fechada.

Ao analisar a Fig. 7, é possível verificar que as regras de comutação $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ e $\min[\sigma_1(t), \sigma_2(t)]$ tendem a

zero, o que ilustra a evolução da regra de comutação para estabilizar os subsistemas 1 e 2 e o sistema (22) e (23) em malha fechada. Nota-se ainda, que em ambos os casos simulados, leva-se aproximadamente 2 segundos para que seja alcançada a convergência.

Por fim, na Fig. 8, são apresentados a resposta dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no domínio do tempo.

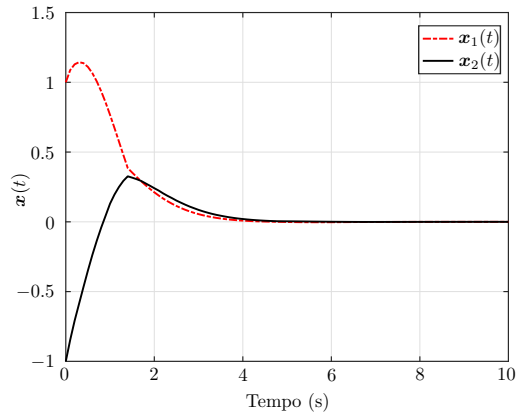


Figura 8. Resposta no tempo para o sistema em malha fechada.

Ao analisar a Fig. 8, é possível notar que ao aplicar uma perturbação do tipo externa e impulsiva em $t = 0$, verifica-se que o perfil das curvas dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ encontram-se caracterizadas com amplitudes decrescentes, a partir de 4 segundos, o que necessariamente implica afirmar que o sistema encontra-se estável. Diante disso, nota-se que sistema adotado como *benchmarking* nesta Subseção, a partir da metodologia adotada, para o controle em malha fechada, é factível mesmo para o sistema caótico apresentado.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo foram apresentadas duas propostas, em malha aberta e fechada, com intuito de aplicar as metodologias de desigualdade de Lyapunov-Metzler generalizadas para sistemas LPV chaveados. Como exemplo numérico, foi utilizado o sistema de Van der Pol aproximado via síntese LPV (ver Seção 2) por meio da síntese LPV, considerando a abordagem do modelo sujeito à comutação (ver Seções 3 e 4).

A verificação da extensão das metodologias para sistemas LPV foram realizadas na Seção 5 de simulação e análise dos resultados. A partir dos dados obtidos, foi possível determinar um conjunto de matrizes P_i que fizeram com que a regra de comutação adotada estabilizasse o sistema em malha aberta (ver Subseção 5.1). Em relação ao controle em malha fechada (ver Subseção 5.2), também foi possível obter as matrizes P_i e de ganho K_i a partir do controlador utilizado.

A partir dos resultados obtidos, é possível comprovar que a estabilidade é atingida tanto em malha aberta quanto em malha fechada do sistema chaveado de Van der Pol (ver Figs. 5 e 8). Do exposto, é possível concluir que a generalização para sistemas LPV das metodologias de Geromel e Colaneri (2006) foram bem sucedidas para o sistema proposto.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), a Universidade Federal do Ceará (UFC), a Universidade Federal do Piauí (UFPI), a Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA) e ao grupo de Estudo em Automação e Controle (GEAC) pelo suporte e apoio na produção deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Abbas, H.S., Tóth, R., Petreczky, M., Meskin, N., Velni, J.M., e Koelewijn, P.J. (2021). LPV modeling of nonlinear systems: A multi-path feedback linearization approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(18), 9436–9465. doi:10.1002/rnc.5799.
- Asarin, E., Dang, T., e Girard, A. (2003). Reachability analysis of nonlinear systems using conservative approximation. In *Hybrid Systems: Computation and Control*, 20–35. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/3-540-36580-x_5.
- Briat, C. (2015). *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems*, volume 3. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-662-44050-6.
- Bruzelius, F., Pettersson, S., e Breitholtz, C. (2004). Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. IEEE. doi:10.23919/acc.2004.1386766.
- Cooper, M., Heidlauf, P., e Sands, T. (2017). Controlling chaos–forced van der pol equation. *Mathematics*, 5(4), 70. doi:10.3390/math5040070.
- Daafouz, J., Riedinger, P., e Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11), 1883–1887. doi:10.1109/tac.2002.804474.
- de Souza, C.E. e Trofino, A. (2006). Gain-scheduled h_2 controller synthesis for linear parameter varying systems via parameter-dependent lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16(5), 243–257. doi:10.1002/rnc.1040.
- Deaecto, G.S. e Geromel, J.C. (2008). Controle de sistemas lineares com comutação. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 19(4), 431–443. doi:10.1590/s0103-17592008000400006.
- Geromel, J.C. e Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5), 1915–1930. doi:10.1137/050646366.
- Hanifzadegan, M. e Nagamune, R. (2014). Smooth switching LPV controller design for LPV systems. *Automatica*, 50(5), 1481–1488. doi:10.1016/j.automatica.2014.03.014.
- Liberzon, D. e Morse, A. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19(5), 59–70. doi:10.1109/37.793443.
- Liu, C., Yang, Z., Liu, X., e Huang, X. (2020a). Stability of delayed switched systems with state-dependent switching. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(3), 872–881. doi:10.1109/jas.2019.1911624.

- Liu, L., Liu, Y.J., Chen, A., Tong, S., e Chen, C.L.P. (2020b). Integral barrier lyapunov function-based adaptive control for switched nonlinear systems. *Science China Information Sciences*, 63(3). doi:10.1007/s11432-019-2714-7.
- Lu, B. e Wu, F. (2004). Control design of switched LPV systems using multiple parameter-dependent lyapunov functions. doi:10.23919/acc.2004.1384517.
- Novara, C. (2011). Set membership identification of state-space LPV systems. In *Linear Parameter-Varying System Identification*, 65–93. WORLD SCIENTIFIC. doi:10.1142/9789814355452_0004.
- Nowak, R.D. (2002). Nonlinear system identification. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 21(1), 109–122. doi:10.1007/bf01211655.
- Rego, R.C. e Costa, M.V. (2023). Offline output feedback robust anti-windup MPC-LPV using relaxed LMI optimization. *European Journal of Control*, 69, 100719. doi:10.1016/j.ejcon.2022.100719. URL <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2022.100719>.
- Sun, Z.D. e Ge, S.Z.S. (2005). *Switched Linear System-Control and Design*. London: Springer.
- Wirth, F. (2005). A converse lyapunov theorem for linear parameter-varying and linear switching systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(1), 210–239. doi:10.1137/s0363012903434790.
- Zhai, H. e Sands, T. (2022). Controlling chaos in van der pol dynamics using signal-encoded deep learning. *Mathematics*, 10(3), 453. doi:10.3390/math10030453.
- Zhao, J. e Hill, D.J. (2008). On stability, l_2 -gain and h_∞ control for switched systems. *Automatica*, 44(5), 1220–1232. doi:10.1016/j.automatica.2007.10.011.